In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

Aufgabe 9.2 Fußpunktkurven der Ellipsen
Konstruieren Sie die Fußpunktkurven zu Ellipsen mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ für beliebige Lage des Pols $A = (c, d)$.

1. Warum liegen alle Fußpunktkurven außerhalb der Ellipse?
2. Sind sie Booth'sche Lemniskaten, wenn A im Ursprung liegt?
3. Sind sie – bei beliebiger Lage von A – Pascal'sche Schnecken, wenn die Ellipse speziell ein Kreis ist?
4. In welchem Sonderfall ergibt sich eine Kardioide?

Hinweis
Legen Sie für die Halbachsen a und b der Ellipse Schieberegler an. Verschaffen Sie sich durch Ziehen an A zunächst einen Überblick. Beachten Sie als Hilfe die einleitend vorgeschlagene Vorgehensweise. ◀

Lösung **Zu 1.** Per definitionem liegen die Fußpunkte auf der Tangente. Aber keine Tangentenpunkte liegen innerhalb der Ellipse. Damit kann auch kein Punkt einer Fußpunktkurve (=Pedalkurve) innerhalb der Ellipse liegen. Auf dem Rand der Ellipse können sie allerdings liegen.

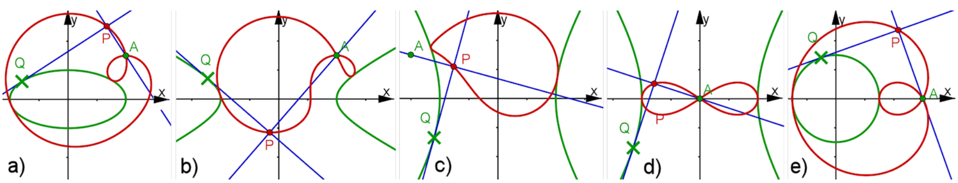

Abb. 9.3 **Aufgabe 9.2 Fußpunktkurven der Kegelschnitte** a) Ellipse $a = 2,\ b = 1\ A = (2, 1)$, b) Hyperbel $a = 2,\ b = 1\ A = (2, 1)$, c) Hyperbel $a = 2,\ b = 3\ A = (-3, 1.5,$ d) Hyperbel $a = 2,\ b = 3\ A = (0, 0)$ Lemniskate? e) Kreis $a = 1.5,\ b = 1.5\ A = (3, 0)$ Pascalsche Schnecke?

Herleitung einer allgemeinen Gleichung Wir gehen in üblicher Weise vor: Der Weg von $Q = (u, v)$ ist $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$. Die Tangente in Q hat nach Gleichung 7.9 auf Seite 201 die Gleichung $\frac{u\,x}{a^2} + \frac{v\,y}{b^2} = 1$. Als Steigung ergibt sich $-\frac{b^2 u}{a^2 v}$. Damit ist das Lot von $A = (c, d)$ aus: $y = \frac{a^2 v}{b^2 u}(x - c) + d$. Aus den drei Gleichungen liefert der Eliminate-Befehl von Mathematica:

Gleichung für die allgemeine Pedalkurve der Ellipsen

$$a^2(c - x)^2 + b^2(d - y)^2 = (x(c - x) + y(d - y))^2 \tag{9.1}$$

Das Mathematica-Notebook mit allen Rechnungen ist auf der Website, auch als *.pdf. Wenn man A in der Zeichenebene umherzieht, ergeben sich, wenn A außerhalb der Ellipse liegt, Kurven mit Schlaufen, mit Kurven mit Spitze für A auf dem Rand, die Ellipse umgreifende „weiche“ Formen für innen liegende A.

Booth'sche Kurven, zu 2. Für $c = 0$ und $d = 0$ folgt aus der allgemeinen Gleichung $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$. Das ist ein **Booth'sches Oval** nach Gleichung 4.31 auf Seite 117 im Buch. Übrigens ist es mit den **Booth'sche Lemniskaten** wie mit den *Katzen*: der Name bezeichnet sowohl einen Oberbegriff als auch speziell die in der genannten Gleichung mit Ω bezeichneten Booth'schen Ovale und die mit Λ bezeichneten Booth'schen Lemniskaten, „im engeren Sinne“ sagt man. Ebenso: *Kater* und (weibliche) *Katzen*. Oft bevorzuge ich als Oberbegriff aber **Booth'sche Kurven**.

Pascal'sche Schnecken, zu 3. Wenn die Ellipse speziell ein Kreis ist, kann A o.B.d.A auf die x-Achse gelegt werden, wie es Abb. 9.3 e) zeigt. Im folgenden wird sowohl geometrisch als auch analytisch gezeigt, dass dieser Fall zu allen Pascal'schen Schnecken führt.

Dabei betrachten wir vorweg $A = O$. Der Tangenten-Berührpunkt und der Lotfußpunkt fallen nun zusammen und die Pedalkurve eines Kreises mit dem Pol in seinem Mittelpunkt ist dieser Kreis selbst.

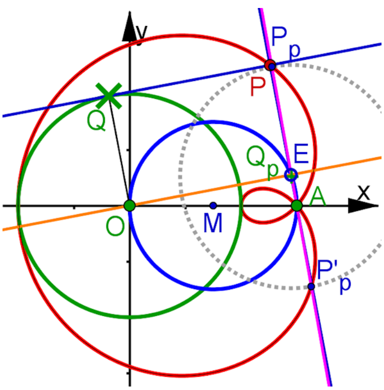

Abb. 9.4 Zu 3: Pascal'sche Schnecke als Pedalkurve der Ellipse
Vergleich mit Abb. 3.6 von S.47 im Buch zeigt, dass der Radius des grünen Kreises (im Bild links) die Leinenlänge k sein muss, wenn man auf „Pascalsche Schnecke“ hinaus will, denn von einer Stelle der x-Achse muss Q_p mit k nach rechts und links zwei Nullstellen der Pascal'schen Schnecke erreichen. Damit liegt im Bild links der Ursprung auf dem Wanderkreis, der andererseits den Doppelpunkt A enthalten muss. Der Mittelpunkt des blauen Wanderkreises ist also $M = (\frac{c}{2}, 0)$, wenn $A = (c, 0)$ ist.

Geometrischer Beweis Wie oft im Buch erwähnt ist, muss man für den geometrischen Nachweis, dass zwei Konstruktionen auf dieselbe Kurve führen, beide Konstruktionen in *einer* Zeichnung verwirklichen und die beiden Punkte P und P_p aufeinanderlegen. Wie auch auf Seite 279 im Buch beschrieben, **zeigt sich hier die Stärke eines DGS wie GeoGebra**. Erst nachdem ich einige Stellungen betrachtet habe, bin ich auf die Konstruktionsmöglichkeit gestoßen: Per Konstruktion der Pedalkurve ist der Winkel $\angle QPA$ ein rechter Winkel. Die Parallele zur Tangente QP durch O schneidet den Wanderkreis in E. Auch $\angle OEA$ ist ein rechter Winkel, da der Wanderkreis als Thaleskreis fungiert. Der grüne und der grau gestrichelte Kreis haben denselben Radius $k = a = b$, wie in der Legende zu Abb. 9.4 gezeigt. Darum ist Q_p mit E zu identifizieren und P und P_p fallen zusammen.

Analytischer Beweis Die Gleichung 3.6 von Seite 48 der Pascal'schen Schnecke aus Abb. 3.6 von Seite 47 a) ist $\left(x^2+y^2-2a\,x\right)^2 = k^2\left(x^2+y^2\right)$. Soll die Schlaufe nach links zeigen, wird aus dem Minus ein Plus. Dann brauchen wir ein Verschiebung um c nach rechts und der Durchmesser des Wanderkreises ist $2a = c$. Das ergibt $\left((x-c)^2+y^2+c\,(x-c)\right)^2 = k^2\left((x-c)^2+y^2\right)$. Links besser zusammengefasst: $\left(x^2+y^2-c\,x\right)^2 = k^2\left((x-c)^2+y^2\right)$

Andererseits ist in der oben hergeleiteten Gleichung für die allgemeine Pedalkurve der Ellipsen nun $a = b = k$ und $d = 0$ zu nehmen. Das ergibt $k^2(c-x)^2 + k^2(y)^2 = (x(c-x)-y^2)^2$, also $k^2\left((c-x)^2+y^2\right) = (-x^2-y^2+c\,x)^2$. Wenn wir rechts noch eine $(-1)^2$ herausziehen, haben wir dieselbe Gleichung wie für die Pascal'schen Schnecken.

Wenn wir nun noch bedenken, dass die Lage von A auf der x-Achse die Allgemeinheit nicht einschränkt, können wir sagen:

Alle Pedalkurven von Kreisen sind Pascalsche Schnecken und umgekehrt. Speziell ist die **Kardioide die Pedalkurve eines Kreises** mit dem Pol auf der Peripherie.