In: # Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

Aufgabe 9.3 Fußpunktkurven der Hyperbeln
Konstruieren Sie die Fußpunktkurven zu Hyperbeln mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ für beliebige Lage des Bezugspunktes $A = (c, d)$.

1. Warum liegen alle Fußpunktkurven zwischen den Hyperbelästen?
2. Sind sie Booth'sche Lemniskaten, wenn A im Ursprung liegt?
3. Wie unterscheiden sich die Fußpunktkurven je nachdem ob der Pol A zwischen den Ästen oder auf der konkaven Seite der Äste liegt?
4. In welchem Sonderfall ergibt sich eine Bernoulli'sche Lemniskate?

Hinweis
Ersetzen Sie in der Datei für die vorige Aufgabe in der Kegelschnittgleichung das Plus durch ein Minus. Verschaffen Sie sich durch Ziehen an A zunächst einen Überblick. Beachten Sie als Hilfe die einleitend vorgeschlagene Vorgehensweise. ◀

Lösung Der Leser möge verzeihen, dass einige Passagen dieses Textes fast wörtlich mit der Lösung von Aufgabe 9.2 zu den Ellipsen übereinstimmen. Aber mir war es wichtig, dass diese Lösung auch ohne Rückgriff auf letztere Aufgabe verständlich ist. Außerdem ist es ja eine **tiefe mathematische Wahrheit**, dass Ellipsen und Hyperbel trotz ihres unterschiedlichen Aussehens sehr viel gemeinsam haben.

Zu 1. Per definitionem liegen die Fußpunkte auf der Tangente. Aber keine Tangentenpunkte liegen innerhalb der des konkaven Teils „ihres" Astes. Den anderen Ast können die Tangenten nicht schneiden. Das sieht man sofort in der üblichen Lage, in der die Scheitel auf der x-Achse liegen, da sind die Tangenten steiler als die Asymtopten. Damit kann auch kein Punkt einer Fußpunktkurve (=Pedalkurve) innerhalb den konkaven Hyperbelbögen liegen. Auf dem Rand der Hyperbel können sie allerdings liegen.

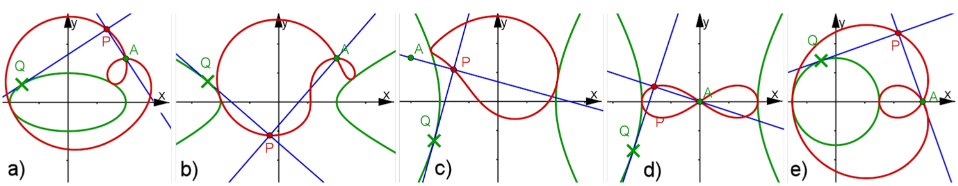

Abb. 9.5 **Aufgabe 9.2 Fußpunktkurven der Kegelschnitt** a) Ellipse $a = 2,\ b = 1\ A = (2, 1)$, b) Hyperbel $a = 2,\ b = 1\ A = (2, 1)$, c) Hyperbel $a = 2,\ b = 3\ A = (-3, 1.5$, d) Hyperbel $a = 2,\ b = 3\ A = (0, 0)$ Lemniskate? e) Kreis $a = 1.5,\ b = 1.5\ A = (3, 0)$ Pascalsche Schnecke?

Herleitung einer allgemeinen Gleichung Wir gehen in üblicher Weise vor: Der Weg von $Q = (u, v)$ ist $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$. Die Tangente in Q hat nach Gleichung 7.9 auf Seite 201 die Gleichung $\frac{u\,x}{a^2} - \frac{v\,y}{b^2} = 1$. Als Steigung ergibt sich $\frac{b^2 u}{a^2 v}$. Damit ist das Lot von $A = (c, d)$ aus: $y = -\frac{a^2 v}{b^2 u}(x - c) + d$. Aus den drei Gleichungen liefert der Eliminate-Befehl von Mathematica:

Gleichung für die allgemeine Pedalkurve der Hyperbeln

$$a^2(c-x)^2 - b^2(d-y)^2 = (x(c-x) + y(d-y))^2 \tag{9.2}$$

Das Mathematica-Notebook mit allen Rechnungen ist auf der Website, auch als *.pdf.

Booth'sche Kurven, zu 2. Für $c = 0$ und $d = 0$ folgt aus der allgemeinen Gleichung $a^2x^2 - b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$. Das ist eine **Booth'sche Lemniskate** nach Gleichung 4.31 auf Seite 117 im Buch.

Zu 4. Wenn zudem $a = b$ gilt, folgt $a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ und mit $a^2 = 2e^2$ haben wir die Bernoullische Lemniskate aus Gleichung 4.22 von Seite 108.

Zu 3. Wenn man A in der Zeichenebene umherzieht, ergeben sich, wenn A im konvexen Bereich der Hyperbel liegt, Kurven mit einem Doppelpunkt, mit Kurven mit Spitze für A auf dem Rand, die den konvexen Bereich der Äste der Hyperbel umgreifende „weiche“ Formen für in den konkaven Bereichen liegende A.

Anmerkung Bei der Hyperbel gibt es keine Entsprechung zu den Pascal'schen Schnecken. Allenfalls könnte man die Familie der Kurven betrachten, die mit $A = (c, 0)$ entstehen, also $a^2(c-x)^2 - b^2y^2 = (x(c-x) + y^2)^2$. Hier aber liefert $a = b$ keine besonderen Formen. Dreht man die entstehenden Kurven um 90^o so sehen sie aus wie Schneemänner.