In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

Aufgabe 9.4 **Fußpunktkurven der Steiner-Kurve und der Astroide**

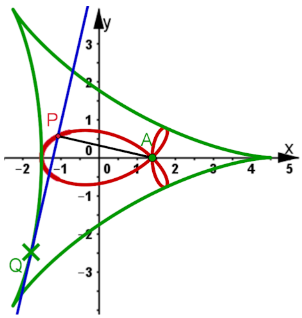

Abb. 9.6 **Steiner-Kurve oder Deltoid** mit einer ihrer Fußpunktkurven. Parameterdarstellung der Steiner-Kurve

$$\begin{aligned} x(t) &= \varrho\,(2\cos(t) + cos(2t)) \\ y(t) &= \varrho\,(2\sin(t) - sin(2t)) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Die kartesische Gleichung der Steiner-Kurve ist:
$(x-3\varrho)^3(x+\varrho)+y^2(2x^2+y^2+24x\varrho+18\varrho^2)=0$
Jakob Steiner (1796-1863) war Schweizer Mathematiker, der später in Berlin arbeitete und Bedeutendes in der Geometrie geleistet hat.

Die **Steiner-Kurve** ist eine Hypotrochoide mit drei Spitzen. Sie ist in Abb. 9.6 zu sehen, aber auch schon in Abb. 8.29 b). Aus Gleichung 8.13 folgt die neben dem Bild angegebene Parametergleichung mit $m=3$, $k=1$ und beliebigem Radius ϱ des Rollkreises. Es gilt für den Umkreisradius $R=3\varrho$.
Erzeugen Sie – als Spur von P – die Fußpunktkurven zu mehreren Stellungen des Pols A. Es gibt das Trifolium, andere Dreiblatt-, Zweiblatt- und Einblattkurven.

Auf die gleiche Weise können Sie auch selbst mit der **Astroide** experimentieren, bei der als Fußpunktkurve das Quadrifolium in Abb. 8.22 gezeigt ist. Welche Varianten ergeben sich hier?

Hinweis

Ausführliche Lösungen finden Sie auf der Website zum Buch. Die kartesische Gleichung der Fußpunktkurven der Steiner-Kurve ist: $((x-a)^2+y^2)^2+(x-a)^3(\varrho+a)-(3\varrho-a)(x-a)y^2=0$ ◀

Implizite kartesische Gleichung der Steiner-Kurve Im Folgenden ist $\varrho=a$ der Radius des (hier nicht sichtbaren) Rollkreises und $3\varrho=3a$ der Umkreisradius für die Steiner-Kurve. Für die Herleitung der im Hinweis genannten Gleichung substituiert man `c=Cos[t]` und `s=Sin[t]` und nimmt noch `c^2+s^2==1`. Dann schafft
`Eliminate[{x==a (2c+c^2-s^2), y==a (2s-2 s c ),c^2+s^2==1},{c,s} ]`
`//FullSimplify` die Gleichung aufzustellen. Ohne die Substitution kommt man nur umständlicher mit Reduce zum Ziel. Dieses und alle weiteren Rechnungen können Sie ausführlich in der Mathematica-Datei (und deren *.pdf) auf der Website lesen.

Teil 1, Fußpunktkurven der Steiner-Kurve, Lösung: Mit der Parameterdarstellung der Steiner-Kurve kann man die Tangente in Q und das Lot von A auf Q bestimmen und zum Schnitt $S = (S_x, S_y)$ bringen. Die zugehörigen Terme geben schon die Parameterdarstellung der Pedalkurven. Hiermit ist die interaktive Darstellung auf der Website gebaut.

Wieder mit obiger Substitution und Eliminate erhält man dann

$$\text{Pedale}: \quad y^4 = (x-b)\left(y^2(3a+b-2x) - (x+a)(x-b)^2\right) \tag{9.4}$$

als implizite kartesische Gleichung der Pedalkurven der Steiner-Kurve.

Formen der Pedalkurven der Steiner-Kurve Der Pol sei $A = (b, 0)$.

- $b < -a$ Einblatt, wie eine Bohne
- $b = -a$ Zweiblatt, die die Grundblätter einer Blume
- $-a < b < 0$ Dreiblatt, links eins klein, recht zwei größere
- $0 = b$ reguläres Trifolium
- $0 < b < 3a$ Dreiblatt in Fischchenform
- $3a = b$ Einblatt mit Spitze bei x=3a
- $3a < b$ Einblatt ohne Spitze

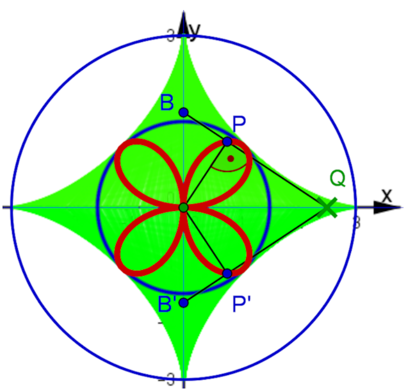

Abb. 9.7 Rosette als Fußpunktkurve der Astroide Buch Abb. 8.22 S. 242
Im Abschnitt 4.4.5.3 und Abb. 4.3.7. b) ist die Astroide als Hüllkurve einer Stange fester Länge zu sehen, deren Enden auf den Achsen wandern. Im genannten Bild wird eine Ellipse erzeugt, links aber wird vom Ursprung aus ein Lot auf die Stange gefällt. Der Fußpunkt dieses Lotes sei P, an der x-Achse gespiegelt liegt P'. Die **Ortskurve von P ist das Quadrifolium,** die übliche Vierblatt-Rosette aus Abb. 8.17, wie im Folgenden (im Buch S. 242) bewiesen wird.
Hier ist die **Astroide** der Rand der grünen Fläche. Ihre Gleichung wird nicht benötigt, denn mit der Stange *hat* man ja schon die benötigten Tangenten.

Teil 2, Fußpunktkurven der Astroide, Lösung: Das Vorgehen lehnt sich sehr an die Handlungsweise bei der Steiner-Kurve an. Alle Rechnungen können Sie ausführlich in der Mathematica-Datei (und deren *.pdf) afg9.4-astroide.nb auf der Website lesen.
Implizite kartesische Gleichung der Astroide In der Parameterdarstellung $x(\alpha) = -a\cos(\alpha)^3$ und $y(\alpha) = a\sin(\alpha)^3$ ist α schon gleich der Tangentenwinkel. So zeigt es Abb. 9.7 im Buch, daher kommt das negative Vorzeichen beim x-Term.
$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{-a}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{y}{a}}\right)^2 = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$, das Minuszeichen verschwindet durch das Quadrat und es folgt $\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \left(\sqrt[3]{y^2}\right) = \left(\sqrt[3]{a^2}\right)$ **als Gleichung der Astroide.**
Mathematica kommt mit `CubeRoot` beim Zeichnen besser zurecht als mit hoch $\frac{2}{3}$.

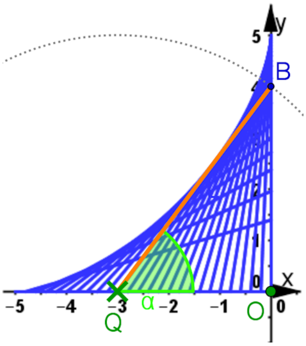

Abb. 9.8 Astroide und rutschende Leiter Buch Abb. 9.7 S. 269 Die Geraden haben die Gleichung $y = f(x,\alpha) = \tan(\alpha)\,x + a\,\sin(\alpha)$, wobei a die Länge der orangefarbenen Leiter ist.
Die partielle Ableitung dieser Gleichung nach α ist:
$0 = \frac{x}{\cos(\alpha)^2} + a\cos(\alpha)$.
Daraus folgt $\boldsymbol{x = -a\cos(\alpha)^3}$ und damit in der oberen Gleichung $y = -a\cos(\alpha)^3 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + a\sin(\alpha) = a\sin(\alpha) \cdot \left(-\cos(\alpha)^2 + 1\right)$, also $\boldsymbol{y = a\sin(\alpha)^3}$. Soll der Parameter α, wie im Bild, die Bedeutung als Tangentenwinkel haben, muss man das Minuszeichen bei x beibehalten. Mit dem Parameter $\varphi = \pi - \alpha$ tritt kein Minuszeichen auf.

Formen der Pedalkurven der Astroide Abb. 9.9 (hier) Liegt der Pol A (blau) im Inneren der Astroide ist die Pedalkurve vierblättrig und berührt jeden Astroidenast. Liegt der Pol auf einem Ast, berührt die nun dreiblättrige Kurve die anderen drei Äste. Wandert der Pol nun hinaus, so ist die Pedalkurve zweiblättrig und es werden zunächst wieder alle Äste berührt. Weiter draußen gibt es aber nur noch zwei Berührungen.

Pedalkurven der Astroide Die Tangente in Q hat die Gleichung $y = \tan(\alpha)(x - x(\alpha)) + y(\alpha)$. Das Lot von $A = (c,d)$ auf die Tangente ist dann $y = -\cot(\alpha)(x-c) + d$. Die beiden schneiden sich in
$S_x = \cos(\alpha)(c\cos(\alpha) + \sin(\alpha)(d - a\sin(\alpha)))$ und $S_y = \frac{1}{2}\sin(\alpha)(a\cos(2\alpha) + a + 2c\cos(\alpha) + 2d\sin(\alpha))$.
Mit der Parameterdarstellung $S = (S_x, S_y)$ ergeben sich schon die Pedalkurven. Hiermit ist die interaktive Darstellung auf der Website gebaut.

Wieder mit obiger Substitution und Eliminate erhält man dann, wie zu erwarten, eine Gleichung 6. Grades.

$$a^2(c-x)^2(d-y)^2 = \left((c-x)^2 + (d-y)^2\right)(x(c-x) + y(d-y))^2 \tag{9.5}$$

Pedalkurven der Astroide und dem Pol $A = (c,d)$.

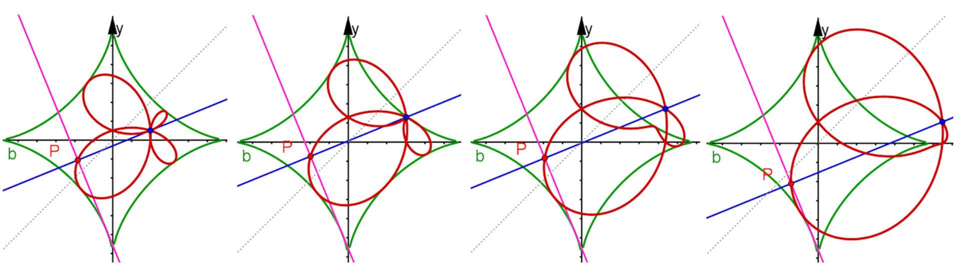

Abb. 9.9 Aufgabe 9.4 Pedalkurven der Astroide Die Bilder zeigen, wie sich die Pedalkurven verändern, wenn der (blaue) Pol A von innen nach außen wandert.