In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.1.3 Negative Fußpunktkurven

Aufgabe 9.5 Fußpunktkurve der Tschirnhaus-Kubik

Bauen Sie die Konstruktion von Abb. 9.4.b) nach – oder nehmen Sie sie von der Website zum Buch – und erkunden Sie, für welche Stellung des Pols A sich anstelle der roten Schlaufenkurve die grüne Parabel als Fußpunktkurve ergibt.

Überlegen Sie, warum man auf diese Weise **immer** von der negativen Fußpunktkurve zu der Ausgangskurve zurückkehren kann. Dies rechtfertigt den Namen **negative Fußpunktkurve**.

Sehen Sie im Abschnitt 4.2.1.1 nach, zu welchem Typ die Tschirnhaus-Kubik gehört. Vergleichen Sie mit den Abb. 4.13 und 4.14.

Machen Sie sich klar, dass die Kurve rechts *keine* Asysmptote hat.

Hinweis

Verwenden Sie die implizite Gleichung 9.7 der Tschirnhaus-Kubik. ◀

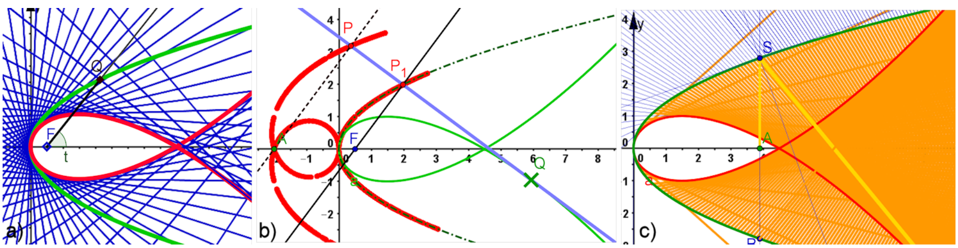

Abb. 9.10 Aufgabe 9.5 Fußpunktkurven der Tschirnhaus-Kubik a) Die Parabel hat als negative Pedalkurve mit dem Brennpunkt als Pol die Tschirnhaus-Kubik, b) Unter den Pedalkurven der Tschirnhaus-Kubik ist auch die Ausgangsparabel Parabel, weiter sihe Abb. 9.11 (hier), c) Die Tschirnhaus-Kubik entsteht auch als Kaustik (Brennlinie) an einer Parabel, wenn Licht senkrecht zur Parabelachse einfällt und an der konkaven Seite der Parabel reflektiert wird.

Ergänzung: Gleichung der Tschirnhaus-Kubik Herleitung der Gleichung 9.7 im Buch $54py^2 = (9p-2x)^2x$. Im Buch konnte dieses aus Platzgründen auf Seite 264 nur angedeutet werden. Wir gehen also von der Parabel $y^2 = 2px$ aus, der Punkt $Q = (u, v)$ erfüllt dann die Gleichung $v^2 = 2pu$. Als Pol wählen wir $A = (c, d)$. Dann ist aus Abb. 9.10 a) (hier) ersichtlich, dass die Steigung der Geraden AQ den Wert $\frac{v-d}{u-c}$ hat. Damit hat die Senkrechte auf AQ in$Q$ die Gleichung $y = \frac{c-u}{v-d}(x-u)+v$.

Im Folgenden betrachten wir $d = 0$, wie wir es für die Aufgabe brauchen. Wir schränken damit aber die Allgemeinheit ein. Ersetzen wir nun $u = \frac{v^2}{2p}$ aus dem Weg für Q, so haben wir die Gleichung der Geradenschar in Abhängigkeit vom Parameter v, deren Hüllkurve die Tschirnhaus-Kubik ergeben soll. **Auf der Website finden Sie eine Mathematica-Datei *.nb und eine lesbare *.pdf-Version dieser und aller folgenden Rechnungen**.

Für die Hüllkurve wählen wir, weil ja schon nach y aufgelöst ist, die Extremum-Methode aus Abschnitt 9.2.3. Die Ableitung nach v führt auf $-\frac{c}{2p}-\frac{cx}{v^2}+\frac{3v^2}{4p^2}-\frac{x}{2p}+1=0$. Ersichtlich kommt ausschließlich v^2 vor, wir substituieren $v^2=z$ und verwenden Solve. Das Ergebnis ist ziemlich länglich und es wird einfacher, wenn wir, wie für die Tschirnhaus-Kubik nötig, $c=\frac{p}{2}$ setzen. Dann folgt nämlich $v^2=z=\frac{px}{3}$ oder $v^2=z=-p^2$. Die zweite Gleichung ist für echte Parabeln unerfüllbar. Das erste v^2 wird also in die Gleichung der Geradenschar eingesetzt. Die führt zu $y=\frac{x(9p-2x)^2}{\pm 3\sqrt{6}\cdot\sqrt{px}}$ und Quadrierung ergibt die oben behauptete Gleichung 9.7.

Pedalkurven der Tschirnhaus-Kubik interaktiv Auf der Website sind zwei GeoGebra-Dateien dazu verfügbar. Die erste setzt Q_1 zugfest auf die Parabel (die ja eigentlich als Sonderfall erst herauskommen soll), nimmt eine Senkrechte auf FQ_1 in Q_1, die nach Obigem Tangente an die Tschirnhaus-Kubik ist. Ein Pol A=(c,d) wird gewählt, zunächst auf der x-Achse. Im Abb. 9.10 b) (hier) zeigt dieses für $d=0$. Der Weg des Fußpunktes des Lotes auf die Tangente kann in dieser Konstruktion **als Ortskurve** erhalten werden, weil GeoGebra mit der Parabel als Weg für Q_1 besser zurechtkommt, als wenn Q auf der implizit gegebenen Kubik läge.

Die andere GeoGebra-Datei nimmt die Definition der Pedalkurven ernst und setzt Q auf die Tschirnhaus-Kubik, wie es Abb. 9.10 b) wirklich zeigt. Dafür hat man die Ortslinie nur noch als Spur von P. Bemerkenswert ist, dass man für Q in den Extrema der Kubik keinen Spurpunkt P erhalten kann. In den Rechnungen ist dann das Lot parallel zur y-Achse und nicht in der Form $y=\cdots$ erfasst. Aber $x=c$ für das Lot und $y=\pm p$ für die Tangente ergeben zulässige Punkte der Pedale der Tschirnhaus-Kubik.

Pedalkurve der Tschirnhaus-Kubik für $A=F=\left(\frac{p}{2},0\right)$ Als implizite Ableitung erhalten wir $108pyy'=81p^2-72px+12x^2$ und damit als Tangente durch $Q=(u,v)$ auf der Tschirnhaus-Kubik $54pv^2=u(9p-2u)^2$ nun tang: $\quad y=\frac{\left(27p^2-24pu+4u^2\right)(x-u)}{36pv}+v$.

Das Lot von $A=(\frac{p}{2},0)$ auf die Tangente ist damit lot: $\quad y=-\frac{(x-\frac{p}{2})(36pv)}{27p^2-24pu+4u^2}$ Mit dem v aus Solve $\left[54pv^2=u(9p-2u)^2,\{v\}\right]$ eingesetzt in Tangente und Lot ergibt sich (mit CAS) aufgelöst nach x und y nun die Parameterdarstellung $x=u/3,\quad y=\sqrt{2/3}\sqrt{p}\sqrt{u}$. Elimination von u ergibt, wie erwartet, die Ausgangsparabel $y^2=2p\,x$.

So kann man immer zurückkehren Zu einer Kurve C ergibt sich zu einem Pol A eine einzige negative Fußpunktkurve (Contra-Pedalkurve) C_N. Für $Q\in C$ ist die Senkrechte auf AQ in Q Tangente an C_N. Diese hat i.A. einen einzigen Berührpunkt B mit C_N. Das Dreieck AQB erhalten wir auch, wenn von $B\in C_N$ ausgehen und auf der Tangente an C_N bis zum Fußpunkt des Lotes von A auf die Tangente gehen. Dieser Punkt Q hat also die Kurve C als Ortskurve.

Andere Pole für Pedalkurven der Tschirnhaus-Kubik Die Lote drehen sich bei Bewegung von B um A. Daher haben andere Punkte eines momentanen Lotes zwar momentan denselben Fußpunkt, verlieren diese Eigenschaft aber sofort, wenn B wandert. Andere (feste) Pole A' haben momentan parallele Lote auf die Tangente, wie man in Abb. 9.10 b) (hier) deutlich sieht. Die mit ihnen erzeugten Pedalkurven sind aber verschieden von

C. Dieses zeigt die interaktive Mathematica-Datei, die man aus der Website vorfindet. Abb. 9.11 b) (hier). Für die Herleitung einer Parameterdarstellung dieser allgemeinen Pedalkurven müssen schon ziemlich ausgefeilte Methoden von Mathematica verwendet werden.

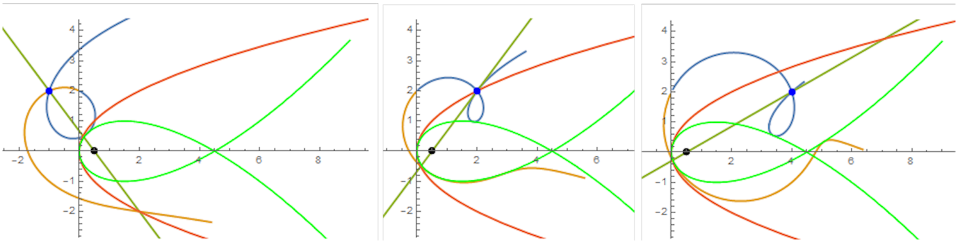

Abb. 9.11 **Aufgabe 9.5 Pedalkurve der Tschirnhaus-Kubik (grün) mit beliebigen Polen (blau)** Die Gerade durch Pol und Brennpunkt der Ausgangsparabel trifft die Schnittpunkte von Parabel und Pedale.

In Newtons System der Kubiken Man erkennt sofort den **Newtonschen Knoten**, zu dem das Polynom f 3. Grades mit $f(x) = \frac{1}{27p}\left(\frac{9}{2}p - x\right)^2 x$ durch den Ursprung und mit der doppelte Nullstelle $x = \frac{9}{2}p$ gehört. Beim Übergang $f(x) \to y^2$ (dem Wurzelziehen) wird diese zum Doppelpunkt und rechts kann keine Asymptote entstehen, weil das Polynom keine solche hat.

Darüber hinaus ist wegen der „Affenkasten"-Eigenschaften in Abschnitt 4.2.3 Seite 95 im Buch klar, dass die Extrema der Tschirnhaus-Kubik bei $x = \frac{3}{2}p$ liegen. Die zugehörige Ordinate ist übrigen p, damit stimmen die Sperrung der Parabel und die Dicke der Schlaufe der Kubik überein.

Die Tschirnhaus-Kubik als Kaustik Tschirnhaus selbst hatte diese Erzeugung eine Kubik vorgestellt. In Abb. 9.10 c) (hier) ist das Vorgehen vorgestellt, die zugehörige GeoGebra-Datei ist auf der Website. Rechnungen dazu habe ich noch nicht angestellt, man bräuchte die Geradenschar der gespiegelten Strahlen in Abhängigkeit von einem Parameter.