In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.4.1 Kardioide, die Herzkurve

Aufgabe 9.6 Die drei Tangenten
Betrachten Sie einen Punkt P_1 der Kardioide und die Tangente in P_1. Zeigen Sie, dass es zwei weitere zu ihr parallele Tangenten der Kardioide gibt. Werden ihre Berührpunkte mit P_2 und P_3 bezeichnet, so bilden die Geraden AP_1, AP_2 und AP_3 Winkel von 120^o miteinander. In der Polardarstellung 3.5 gibt es also einen drehenden „Mercedes"-Stern, an dessen Schnittpunkten mit der Kardioide alle drei Tangenten parallel sind. Bauen Sie eine Datei, die das zeigt, beweisen Sie es, wenn Sie mögen.

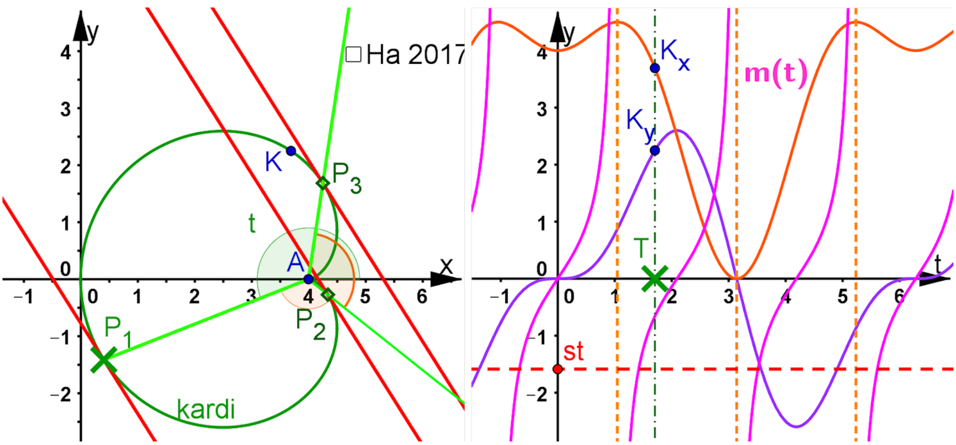

Abb. 9.12 Aufgabe 9.6 Die drei Tangenten
In der Aufgabe ist (versehentlich) nicht formuliert, dass der Punkt A die Spitze (der 3-fach-Punkt) der Kardioide sein soll. Dieser Punkt ist auch Scheitel des Winkels t, der in der Parameterdarstellung (s.u.) als Parameter fungiert. Das rechte Bild ermöglicht das Verstehen und Beweisen aller Beobachtungen.

Grundlage und Panne bei der Bezeichnung Zunächst verwenden wir die Parameterdarstellung 9.16 im Buch Seite 278.

als Epitrochoide, Gl. 8.13
$$\begin{cases} x(t) = \frac{a}{3}\,(2\cos(t) - \cos(2t)) + a \\ y(t) = \frac{a}{3}\,(2\sin(t) - \sin(2t)) \end{cases} \tag{9.6}$$

Wie in der Legende zu Abb. 9.12 (hier) schon erwähnt habe ich versehentlich die Bezeichnungen aus Abb. 9.22) S. 276 im Buch nicht aufgegriffen. Das dortige $A = (a, 0)$, der Mittelpunkt des Wanderkreises, gibt seine Abszisse a in die eben genannte Formel. Das dortige B, der Baum, ist das A in der hier gezeigten Abb. 9.12.

Berechnung der Nullstellen der Kardioide Mit $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ erhalten wir aus $y = 0$ nun $0 = 2\sin(t)(1 - \cos(t))$ Wie erwartet $t = 0$ und $t = \pi$ als Parameter der Nullstellen der Kardioide und Abzissen sind $x(0) = \frac{a}{3}\,(2 - 1)) + a = \frac{4}{3}a$ und

$x(\pi) = \frac{a}{3}(-2-1)) + a = -a + a = 0$. Da in der Abb. 9.12 (hier) $a = 3$ gewählt ist, passen diese Ergebnisse.

Der Stern der parallelen Tangenten Wir verwenden für die Steigung die Formel
$m(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ (im Buch Formel 11.3 S. 217). Die Ableitungen nach t sind:
$\dot{x} = \frac{a}{3}(-2\sin(t) + 2\sin(2t))$ und $\dot{y} = \frac{a}{3}(2\cos(t) - 2\cos(2t))$.
Für die Steigung haben wir damit die Funktion $m(t) = \frac{\cos(t)-\cos(2t)}{-\sin(t)+\sin(2t)}$. Diese ist Abb. 9.12 rechts hellviolett dargestellt und hat die etwa die Form der Tangensfunktion. Ihre Äste haben offenbar den waagerecht gemessenen Abstand $\frac{2\pi}{3} = 120^o$. Damit die Behauptung bewiesen, dass drei Parameterwinkel ihre Schenkel in der Mercedes-Stern-Stellung haben und die zugehörigen Tangenten der Kardioide gleiche Steigung aufweisen.
Zur Übung Rechnung dazu: $\dot{x} = 0$, also $\sin(t)(-1 + 2\cos(t)) = 0$, im relevanten Intervall sind die Polstellen von $m(t)$ also $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$.

Weitere Erkundung der Kardioide In der GeoGebra-Datei auf der Website kann man mit Ziehen von T im zweiten Grafikfenster die Koordinaten eines Kardioidenpunktes K und im 1. Grafikfenster K selbst wandern lassen. So zeigt die Abb. 9.12 rechts eine Stellung. Die Maximumstellen der Funktion $x(t)$ fallen z. B. mit den Polstellen von $m(t)$ zusammen.

Das animierte Bild und die Kardioide als Pascalsche Schnecke Hierfür ist die Kardioide als Polarkurve verwendet mit der Gleichung $r(\theta) = 2a(1-\cos(\theta))$, gespiegelte Formel 3.5 im Buch S. 47. Hier ist a der Radius des Wanderkreises. Auch hiermit hätten wir obigen Beweis führen können. Aber *ein* Beweis reicht.

Implizite kartesische Gleichungen Für die Kardioide aus Abb. 9.12 muss man für die Elimination wieder substituieren $c = \cos(t)$; $s = \sin(t)$ und $c^2 + s^2 = 1$ mitführen. Damit ergibt sich, wie Sie in der Mathematica-Datei (und deren *.pdf) sehen können, $x(4a-3x)^3 = 9y^2\left(4a^2 - 12ax + 6x^2 + 3y^2\right)$ als Gleichung der Kardioide mit Scheitel im Ursprung und Spitze in $(\frac{4}{3}a, 0)$

Für die Kardioide im animierten Bild auf der Website ist die implizite kartesische Gleichung; $4a^2\left(x^2 + y^2\right) = \left(2ax + x^2 + y^2\right)^2$, nach Gleichung 3.6 im Buch, an der y-Achse gespiegelt und $k = 2a$ gesetzt.