In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.4.1.6 Kardioide, Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 9.7 Evolute der Kardioide

Konstruieren Sie die Evolute der Kardioide. Vergleichen Sie mit der Evolute der Nephroide in Abb. 9.15 im Buch S. 283.

Hinweis

Lassen Sie sich von dem Vorgehen bei der Nephroide leiten. Übrigens ist dort in Aufgabe 8.8 und Abb. 9.16 auch die **Katakaustik der Kardioide** mit der Lichtquelle in der Spitze gezeigt. ◀

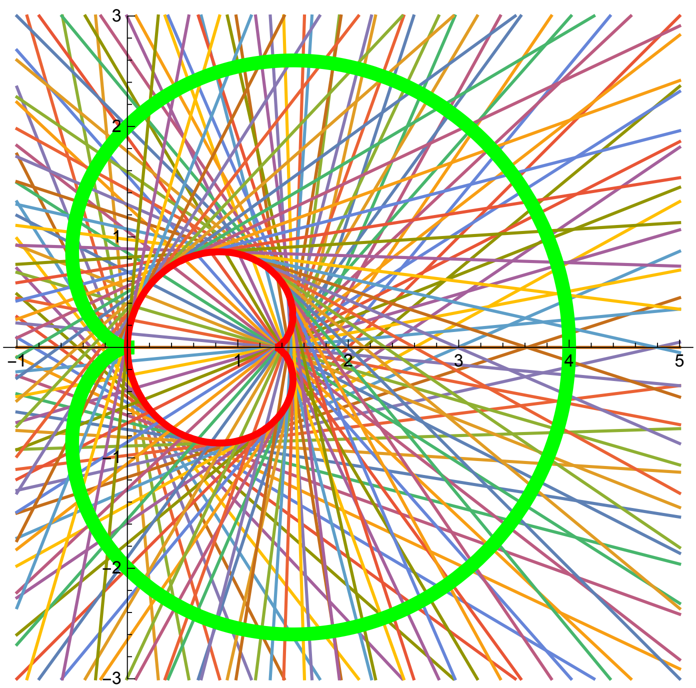

Abb. 9.13 Aufgabe 9.7 Evolute der Kardioide Die Evolute als Hüllkurve der Normalen erscheint als **Kardioide in dreifacher Verkleinerung** innerhalb der Ausgangskurve.

Lösung mit der Kardioide als Pascal'sche Schnecke Für die Erzeugung in GeoGebra habe ich mich für die Lage und Gleichung als Pascal'sche Schnecke entschieden, um noch einen anderen Zugang als in Aufgabe 9.6 zu zeigen. Die Polargleichung ist $r(t) := 2a\cos(t) - 2a$ und daher $r'(t) = -2a\sin(t)$. Wegen Gleichung 11.15 im Buch ist die Tangentensteigung $m'(t) = \frac{-2a\sin(t)\sin(t)+(2a\cos(t)-2a)\cos(t)}{-2a\sin(t)\cos(t)-(2a\cos(t)-2a)\sin(t)} = \tan\left(\frac{3t}{2}\right)$. Die letzte nette Zusammenfassung liefert Mathematica.

Die Normalenschar mit dem Parameter t ist daher
`n[x_] := -Cot[(3 t)/2] (x - r[t] Cos[t]) + r[t] Sin[t]` in Mathematica-Syntax. Dieses und weiteres können Sie in der Mathematica-Datei (und ihrer *.pdf) auf der Website lesen. Eine Tabelle mit 50 solcher Normalen ist zusammen mit der grünen Ausgangs-Kardioide in Abb. 9.13 (hier) gezeichnet.

Die Evolute ist die Hüllkurve dazu Ich habe sie als ein Drittel so groß geraten. Ihr Scheitel ist nun im Ursprung und die Spitze bei $\frac{4a}{3}$ mit dem $a = 1$ und der in der Aufgabe 4.6 hergeleiteten Formel $x(4a - 3x)^3 = 9y^2 \left(4a^2 - 12ax + 6x^2 + 3y^2\right)$ der Kardioide in dieser Ausrichtung. So ist sie rot eingezeichnet und passt (nach Sicht).

Eine Herleitung der Hüllkurve ist mir bisher weder mit der Polardarstellung noch mit der impliziten Gleichung der Kardioide gelungen. Auch in Mathematica werden die Term „wild“.