In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.4.2 Nephroide, die Nierenkurve

9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 9.8 Evolute der Nephroide ist auch eine Nephroide
Die Aufgabe ich neben Abb. 9.14 (hier) formuliert.

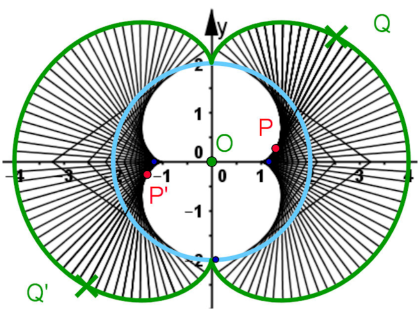

Abb. 9.14 Evolute der Nephroide
Aufgabe: Konstruieren Sie die Normalenschar (siehe 9.3.2). Die Evolute ist eine um 90^o gedrehte, auf die Hälfte verkleinerte Nephroide. Realisieren Sie handwerklich, dass der Berührpunkt P die Mitte zwischen Q und dem einen Schnittpunkt der Normalen mit dem (hellblauen) Grundkreis ist. Im Bild sind die Normalen nur bis zur x-Achse gezeichnet und die untere Hälfte ist durch Punktspiegelung am Ursprung erzeugt.

Lösung Grundlage sei die Parameterdarstellung $x(t) := \frac{a}{2}(3\cos(t) + \cos(3t))$ und $y(t) := \frac{a}{2}(3\sin(t) + \sin(3t))$ aus Gleichung 9.18 auf S. 281 im Buch. Sie ist eine Folge der Auffassung der Nephroide als Epitrochoide aus Abb. 8.28 und Gleichung 8.13 im Buch S. 247.

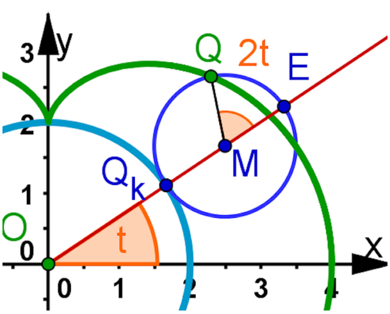

Abb. 9.15 Aufgabe 9.8 Nephroide waagerecht, Bedeutung von t Bei der hier genannten Parameterdarstellung ist die waagrechte Nephroide als Epitrochoide aufgefasst. Der Parameter t ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl OM, mit dem Rollkreismittelpunkt M. Diese entspricht der Abb. 9.13 c) im Buch, das P_z dort ist hier Q und E auf dem Rollkreis und dem Strahl ist zum besseren Verständnis eingefügt. $t = 0$ liegt E Scheitel der Nephroide und hat dann die Koordinaten $(2a, 0)$. Der Radius hellblauen Rastkreises um O ist hier a.

Implizite kartesische Gleichung der Nephroide Wieder substituieren wir $c = \cos(t)$ und $s = \sin(t)$. Nun müssen wie die Parameterdarstellung mit diesen Termen schreiben $\cos(3t) = c^3 - 3cs^2$ und $\sin(3t) = -s^3 + 3sc^2$. Mit

```
Eliminate[{x==a/2 (3c+c^3-3 c s^2),y== a/2 (3s - s^3+3 c^2 s ),
 s^2+c^2==1},{s,c}]\\FullSimplify
```

folgt als Gleichung der Nephroide

$$4a^6 + 3a^4\left(5x^2 - 4y^2\right) + 12a^2\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)^3. \tag{9.7}$$

Schnitte mit den Achsen Aus der kartesischen Gleichung erhalten wir mit $y = 0$ die rechte und die linke Scheitelstelle $x = \pm 2a$ als einfache Nullstellen. Mit $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der beiden Spitzen $y = \pm a$, jeweils dreifach.

Ableitungen nach t mit kartesische Tangentensteigung Es gilt $\dot{x}(t) = \frac{1}{2}a(-3\sin(t) - 3\sin(3t))$ und $\dot{y}(t) = \frac{1}{2}a(3\cos(t) + 3\cos(3t))$ und daher $m(t) = -\frac{\cos(t)+\cos(3t)}{\sin(t)+\sin(3t)}$. In Abb. 9.24 a) (hier) ist in Blau diese Funktion m gezeichnet, sie ist $\frac{\pi}{2}$-periodisch. Zu jeder Richtung gibt es vier parallele Tangenten. **Als Zusatz wird das Tangentenquartett** unten betrachtet.

Die Normalen mit Parameter t Ihre Gleichung ist $y = \frac{\sin(t)+\sin(3t)}{\cos(t)+\cos(3t)}(x - x(t)) + y(t)$. Aus 100 solchen Normalen ist Abb. 9.16 (hier) für $a = 2$ entstanden. Zusätzlich ist dort die Ausgangs-Nephroide in Grün und die Hüllkurve in Rot eingezeichnet.

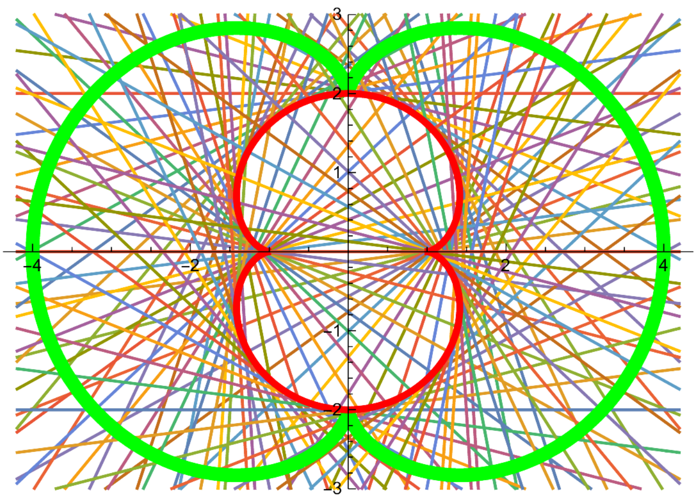

Abb. 9.16 Evolute der Nephroide
Aufgabe: Konstruieren Sie die Normalenschar (siehe 9.3.2). Die Evolute ist eine um 90^o gedrehte, auf die Hälfte verkleinerte Nephroide. Hier sind die Normalen mit Mathematica ohne Einschränkungen gezeichnet.

Fazit Die Hüllkurve der Normalen, also die Evolute der Nephroide, ist nach Sicht auch eine Nephroide und zwar in halber Größe und aufrecht. In Rot ist die Nephroide $x(t) := \frac{a}{4}(3\cos(t) - \cos(3t))$ und $y(t) := \frac{a}{4}(3\sin(t) - \sin(3t))$ mit $a = 2$ eingetragen. Die Minuszeichen sorgen für die aufrechte Stellung.

Berechnungen zur Hüllkurve führen auch tatsächlich zu dieser „kleinen Nephroide“ mit der impliziten Gleichung $a^6 + 3a^4(5y^2 - 4x^2) + 48a^2(x^2 + y^2)^2 == 64(x^2 + y^2)^3$. Das ist in der Mathematica-Datei (und ihrer *.pdf) bewiesen. Aus der oben genannten impliziten Nephroidengleichung entsteht diese durch Tausch von x und y und Ersetzen von a durch $\frac{a}{2}$.

Mitteneigenschaft von P Handwerklich liegt der Berührpunkt P tatsächlich auf der Mitte zwischen Q und dem einen Schnittpunkt der Normalen mit dem (hellblauen) Grundkreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$.

Für eine konstruktive Überprüfung, wie sie in Abb. 9.24 b) gezeigt ist, wurde in der zweiten GeoGebra-Datei zu dieser Aufgabe zu Q auf der Nephroide Tangente und Nor-

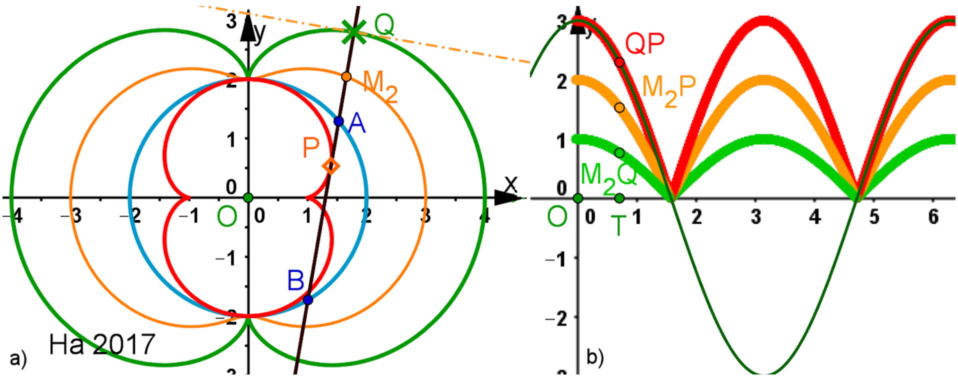

Abb. 9.17 Kleine Nephroide als Mittenort und Abstände a) Die Normale in Q schneidet den Grundkreis in A und B. Die Mitte von $\overline{QB}$ hat auch die halb so große aufrechte Nephroide als Ortskurve.
b) Weitere Erkenntnisse ergeben sich aus Aufgabe 9.11. Der Abstand $\overline{QP}$ ist $|\frac{3}{2}\cos(t)|$, zusammengesetzt aus $\overline{M_2Q} = |\frac{1}{2}\cos(t)|$ und $\overline{M_2P} = |\cos(t)|$. Dieses ist im 2. Grafikfenster dargestellt.

male konstruiert und letztere mit dem Kreis zum Schnitt gebracht. Die Strecke von Q zu dem weiter entfernten Schnittpunkt B wird von P halbiert und die Ortskurve von P bei Bewegung von Q ist tatsächlich auch die halb so große und aufrechte Nephroide, also auch die Evolute. In der Mathematica-Datei wird dieser Weg rechnerisch nachvollzogen. Dabei zeigt sich, dass die Ortskurve von P *wirklich* die Evolute der Nephroide ist. Offensichtlich ist die Ortskurve von M_2 keine Nephroide. Sie ist aber auch keine „verkürzte Epitrochoide“, denn sie berührt den Rastkreis, was die verkürzten Epitrochoiden nicht tun, wie Abb. 8.28 d) zeigt.

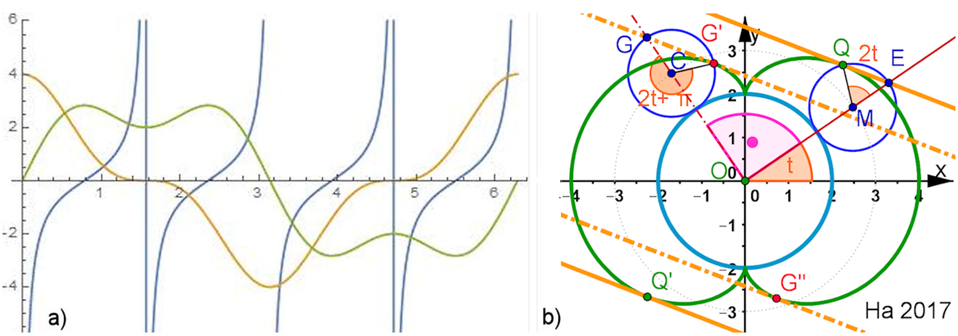

Abb. 9.18 Nephroide und ihr Tangentenquartett a) Die Funkionen vom Parameter t: $m(t)$ blau, $x(t)$ ocker, $y(t)$ oliv, b) Eine Senkrechte ausf dem „Parameterstrahl“ von Q erzeugt den Parameterstrahl von G'. Dann sind die Tangenten von Q und G' an die Nephroide parallel. Zwei weitere Parallelen entstehen durch Punktspiegelung.

Zusatz: Das Tangentenquartett Die Abb. 9.18 a) (hier) beweist, dass die Steigungsfunktion $\frac{\pi}{2}$-periodisch ist. Im Hinblick auf Aufgabe 9.6 müsste es sich hier ein „drehen-des Tangentenquartett“ handeln. Bevor wir das aber sehen können, müssen wir uns in die Bedeutung des Parameters t vertiefen, wie es in Abb. 9.15 (hier) dargestellt ist. In Abb. 9.18 b) (hier) wird diese Erkenntnis ausgenutzt. Der Parameter t ist der Winkel, um den sich der Rollkreismittelpunkt von der waagerechten Ausgangslage aus gedreht hat. Der Wälzwinkel im Rollreis ist dann bei der Nephroide $2t$. Wächst t um $\frac{\pi}{2}$, wird der Wälzwinkel $2t+\pi$. Die Tangenten in den beiden zugehörigen Punkten Q und G' an die Nephroide sind also parallel. Durch Punktspiegelung am Ursprung sind Q' und G'' mit ihren Tangenten erzeugt. In der GeoGebra-Datei auf der Website können Sie durch Ziehen an dem Schieberegler t das Tangentenquartett drehen, stets bleibt der violette rechte Winkel $\angle EOG$erhalten.

Beobachtung: Die Tangenten schneiden anscheinend den Rollkreis in dem Punkten E und G. Können Sie das beweisen?