In: **Kurven erkunden und verstehen**
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 9.9 Fußpunktkurve der Nephroide mit dem Pol Z
Konstruieren Sie die Fußpunktkurve zur Nephroide bezüglich eines beliebigen Punktes Z. Verwenden Sie nicht nur die Spur, sondern auch die Ortslinie. Ziehen Sie nun an Z. Wenn Z im Ursprung liegt, erhalten Sie eine Kurve mit zwei nach innen gerichteten Schlaufen. So ähnlich ist die bipolare Kurve in Abb. 4.20 a) a). Vergleichen Sie.

Lösung Wie bei den vorigen Aufgaben zur Nephroide wird die Parameterdarstellung verwendet: $x(t) := \frac{a}{2}\,(3\cos(t)+\cos(3t))$ und $y(t) := \frac{a}{2}\,(3\sin(t)+\sin(3t))$ aus Gleichung 9.18 auf S. 281 im Buch.

Tangenten und Lote Wie bei der vorigen Aufgabe ist die Tangente in Q nun $tang(t) = t\csc(t)\left(a-\frac{1}{2}x\cos(2t)\sec(t)\right) = -\cot(2t)x+\frac{a}{\sin(t)}$. Die Lote von $Z=(p,d)$ auf die Tangente haben daher eine ganz einfache Gleichung: $lot(t) = \tan(2t)(x-p)+d$

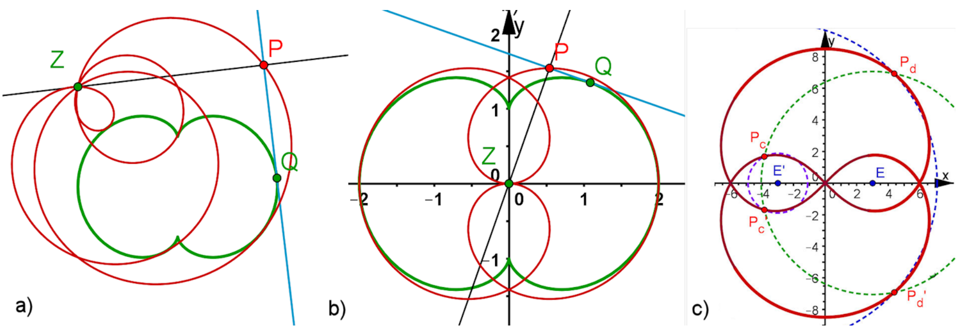

Abb. 9.18 Aufgabe 9.9 Nephroide und ihre Pedalkurven a) beliebiger Pol Z, b) $Z=(0,0)$, c) Cassinische Kurve passt nicht

Schnittpunkt von Tangente und Lot Alle Rechnungen finden Sie ausführlicher und der Mathematica-Datei (und ihrer *.pdf) auf der Website. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $xs = \left(\frac{1}{2}\sin(4t)(a\csc(t)-d+p\tan(2t)\right)$, und
$ys = \tan(2t)\left(\frac{1}{2}\sin(4t)(a\csc(t)-d+p\tan(2t))-p\right)+d$. Mit der nun schon gewohnten trigonometrischen Auflösung und der Substitution $s=\sin(t)$ und $c=\cos(t)$ schafft Mathematica s und c zu eliminieren. Es ergibt sich die Gleichung für die Pedalkurven der Nephroide zu $4a^4(d-y)^2\left((d-y)^2+(x-p)^2\right)-$
$4a^2\left((d-y)^2+(x-p)^2\right)\left(y(y-d)+x^2-xp\right)^2+\left(y(y-d)+x^2-xp\right)^4$. Wir haben wegen der 8 möglichen Schnittpunkte mit einer Geraden eine Kurve 8. Grades erwartet.

Legen wir den Pol auf die x-Achse, wird die Gleichung etwas übersichtlicher, insbesondere, wenn man von Hand noch etwas nacharbeitet.
$4a^2\left((x-p)^2+y^2\right)\left(a^2y^2-\left(-px+x^2+y^2\right)^2\right)+\left(-px+x^2+y^2\right)^4=0$
als **Gleichung für Pedalkurven der Nephroide mit Pol auf der x-Achse**.

Pol im Ursprung Setzen wir nun auch noch $p = 0$ erhalten wir
$4a^2\left(a^2y^2 - \left(x^2+y^2\right)^2\right) + \left(x^2+y^2\right)^3 = 0.$
Hierbei haben wir einen Faktor (x^2+y^2) weglassen können. Er sagt nur, dass der Ursprung erreicht wird. Das ist bei der reduzierten Kurve auch klar.

Ganz offensichtlich hat diese Kurve in Abb. 9.18 b) (hier) waagrechte Tangenten im Ursprung, das aber ist bei der bipolaren Kurve Abb. 9.18 c) (hier) nicht der Fall.