

# Reißverschluss-Datei zum Buch mit allerlei Zusätzen

Dörte Haftendorn

**Kurven erkunden und verstehen**

Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen

Springer Spektrum

In: **Kurven erkunden und verstehen**  
Dörte Haftendorn, Springer 2017, Website zum Buch

**Aufgabe**

**Lösung**

**Aufgabe**

**Lösung**

**Aufgabe**

**Lösung**

[www.kurven-erkunden-und-verstehen.de](http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de)

**Abb. 1** Aufgaben und Lösungen, Ergänzungen und Weiterführungen Diese Datei ist genauso gegliedert wie das Buch und die Website. Die zugehörigen GeoGebra-Dateien und andere zusätzliche Lösungen finden Sie auf der Website an den entsprechenden Stellen.

**Vorwort** Mathematik ist wunderbar! Wirklich kann man sich über die Schönheit und Vielfalt der mathematischen Kurven nur wundern. Man kann staunen, wie einfach sie sich heute geometrisch mit Computermöglichkeiten erzeugen lassen, wie viele Freiheiten man beim Variieren hat, wie wenige elementare mathematischen Fähigkeiten man für interessante Ergebnisse braucht, wie viele mathematische Kompetenzen man an ihnen entwickeln kann.

Ich empfinde es als „unendlich schade“, dass heute im Dienst befindliche Lehrende die „Kegelschnitte“, geschweige denn die „Höheren Kurven“, gar nicht mehr aus eigener Schulzeit kennen. Zumindest gilt das für Deutschland. Nun aber gibt es kräftige Werkzeuge, allen voran das frei verfügbare GeoGebra, die alle Wünsche erfüllen können, die man an eine nachhaltige, von den Lernenden mitgestaltete Lehre von Mathematik stellt. Es geht nicht darum, das historische Wissen über Kurven auszubreiten, sondern darum, dass Kurven durch ihre eindrücklichen Konstruktionen und Visualisierungen Fragen aufwerfen, die dann das Lernen mathematischen „Handwerks“ mit Sinn erfüllen. Dazu zählen sowohl elementargeometrische Argumentationen, als auch Repräsentationen der Kurven im kartesischen Koordinatensystem, Verwendung von Parameter- und Polargleichungen und die entsprechenden Beweise.

Ziel des Buches ist es, eine zeitgemäße Gesamtdarstellung zu Kegelschnitten und höheren Kurven zu bieten, die der mathematischen Ausbildung, vor allem in den Lehrämtern, neue Impulse geben soll. Einzelne Aspekte können für Vorlesungen, Seminare, Hausarbeiten, Projekte, Begabtenförderung und ganz normale Klassen und Kurse vom 8. Schuljahr bis zum 8. Semester, ja bis in hohe Alter interessierter Laien, herausgegriffen werden. Entsprechende Hilfen gibt Kapitel 10. Schwerpunkt ist, wie der Titel verspricht: **Kurven erkunden und verstehen**.

Auf der Website zum Buch <http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de> sind die interaktiven Dateien zu finden. Weitere Kurven und ausführliche Rechnungen, für die im Buch der Platz nicht reichte, bieten Ihnen Anregungen zum Vertiefen. Auch die Aufgabenlösungen stehen dort.

Für die Anregung Mitte der 90er Jahre, mich in der Schule und dann in der Hochschule mit Kurven zu befassen, danke ich Hans Schupp und Thomas Weth. Der internationalen, kreativen GeoGebra-Community unter ihrem *spiritus rector* Markus Hohenwarter verdanke ich das geniale Werkzeug für dieses Buch. Dem Springer Spektrum Verlag ist zu danken für die großzügige Ausstattung mit vielen, ausschließlich farbigen Bildern.

Mein besonderer Dank gilt meinem Kollegen Dieter Riebesehl, der selbst Freude am freien Erkunden hatte. Sein fundierter mathematischer Rat und seine stete Gesprächsbereitschaft waren hilfreich.

Meinem Mann Roland Weissbach danke ich für seine Geduld und Unterstützung.

Lüneburg im August 2016,  
Dörte Haftendorn

# Inhaltsverzeichnis

Aufgabenverzeichnis	xiii
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Werkzeugkasten</b>	<b>3</b>
2.1 Wie entsteht eine Kurve geometrisch?	3
2.2 Was bedeuten Gleichungen mit $x$ und $y$ ?	3
2.2.1 Punkte und Geraden	3
2.2.2 Kreise und Grundlegendes	3
2.2.3 Allgemeine Kurvengleichung und Verschiebung	3
2.3 Was sind Polarkoordinaten?	3
2.3.1 Polarkoordinaten lesen und verstehen	3
2.3.2 Polarkurven	3
2.3.3 Zeichnen von Polarkurven	3
2.3.4 Gekoppelte polar-kartesische Darstellung von Kurven	3
2.4 Was ist eine Parameterdarstellung?	4
2.4.1 Schnelle Zeichnung von Parameterkurven	4
2.4.2 Parameterdarstellung doppelt-kartesisch	4
2.4.3 Gebiet der Ebene in Parameterdarstellung	4
2.4.4 Wie rechnet man eine Darstellung in eine andere um?	4
2.5 Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen?	4
2.5.1 Was ist eine algebraische Kurve?	4
2.5.2 Was ist eine transzendente Kurve?	4
2.6 Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun?	4
2.6.1 Wie entsteht eine Raumfläche aus einer Kurvengleichung?	4
2.6.2 Raumkurven und Raumflächen in anderen Darstellungen	4
2.7 Tipps für GeoGebra	4
2.7.1 Wo findet man GeoGebra und die Website zum Buch?	4
2.7.2 Wichtige Tipps für Kurven	4
2.7.3 Was (noch) nicht geht in GeoGebra	4
2.8 Tipps zu weiterer Mathematik-Software	4
2.8.1 Tipps für CAS-Taschenrechner	4
2.8.2 Tipps für Wolfram-Alpha und Mathematica	4
2.8.3 Tipps für Programme zur Raumgeometrie	4
2.8.4 Cinderella und andere starke Mathematik-Systeme	4
2.8.5 Blick zurück und nach vorn	5
<b>3 Klassische Kurven ohne Ende</b>	<b>7</b>
3.1 Konchoiden: die Hundekurve und ihre Verwandten	7
3.1.1 Konchoide des Nikomedes, genannt Hundekurve	8
3.1.2 Allgemeine Definition der Konchoiden	10
3.1.3 Polargleichungen der Konchoiden	10

3.1.4	Pascal'sche Schnecken oder die Limaçon	11
3.1.5	Formenreichtum der Konchoiden	13
3.2	Strophoiden: die Seilkurve und ihre Verwandten	16
3.2.1	Gerade Strophoide	17
3.2.2	Allgemeine Strophoide	19
3.2.3	Schiefe Strophoide	20
3.2.4	Noch allgemeinere Strophoiden	22
3.3	Trisektrix	26
3.3.1	Die Trisektrix von Maclaurin	26
3.4	Cissoiden: die Efeukurve und ihre Verwandten	26
3.4.1	Die Cissoide des Diokles	26
3.4.2	Allgemeine Cissoide	26
3.4.3	Die allgemeine Polargleichung der Cissoide	26
3.4.4	Die klassischen Kurven als Cissoiden	26
3.4.5	Geometrie aus der Polargleichung erfinden	27
3.4.6	Noch allgemeinere Cissoiden	29
3.5	Analysis-Anwendungen bei den klassischen Kurven	30
<b>4</b>	<b>Barocke Blüten und Früchte</b>	<b>31</b>
4.1	Versiera, die Hexenkurve	31
4.1.1	Die (weite) Versiera	31
4.1.2	Die enge und die weite Versiera	32
4.1.3	Versiera und ihre Rotation um die x-Achse	34
4.1.4	Allgemeine Versiera	36
4.2	Neil'sche Parabel und andere Kubiken	38
4.2.1	Klassifikation der Kubiken	38
4.2.2	Graphen der Kubiken vom Typ II., IV., III. und I	38
4.3	Cassini'sche Kurven und andere bipolare Kurven	38
4.3.1	Cassini'sche Kurven konkret	38
4.3.2	Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für $r$ und $r'$	39
4.4	Lemniskaten und andere Gelenkkonstruktionen	43
4.4.1	Bernoulli'sche Lemniskate	43
4.4.2	Noch mehr Lemniskaten	48
4.4.3	Gelenke und Stangenkonstruktionen	54
4.4.4	Konstruktion der Kegelschnitte mit einem Faden	54
4.4.5	Spezielle Ellipsen-Zirkel und Stangenkonstruktion der Ellipse	54
4.4.6	Dampfmaschine und andere technische Gelenke	55
4.4.7	Ausblick	57
<b>5</b>	<b>Frei erfunden und hoch hinaus</b>	<b>59</b>
5.1	Frei erfundene geometrisch erzeugte Kurven	59
5.1.1	Die D-Kurve aus der Einleitung	59
5.1.2	Die deutsch- $d$ -Kurve	59
5.1.3	Die Topfblumen-Kurven	60

- 5.1.4 Das gefangene Zweiblatt . . . . . 62
- 5.2 Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven . . . . . 65
  - 5.2.1 Term-Sensibilisierung . . . . . 67
  - 5.2.2 „Konchoiden“ von Baron de Sluze . . . . . 68
  - 5.2.3 Wandelfisch . . . . . 70
  - 5.2.4 Mathematik und eigene Erfindungen . . . . . 70
- 5.3 Hoch hinaus in den Raum . . . . . 70
  - 5.3.1 Familien der raumverwandten Kurven . . . . . 71
  - 5.3.2 Raumflächen durch Rotation der Kurven . . . . . 73
  - 5.3.3 Produkte aus Kurven . . . . . 73
  - 5.3.4 Klein’sche Quartiken . . . . . 73
  - 5.3.5 Quadriken . . . . . 73
  - 5.3.6 Harmonie der rotierten Quadriken . . . . . 73
  - 5.3.7 Exotische Raumflächen . . . . . 73
- 6 Die unlösbaren Probleme der Antike . . . . . 75**
- 6.1 Die Unlösbarkeit . . . . . 75
  - 6.1.1 Winkeldritteler, Würfelverdoppler und Kreisquadrierer . . . . . 75
  - 6.1.2 Algebra und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal . . . . . 75
- 6.2 Beliebige Winkel in n Teile teilen . . . . . 75
  - 6.2.1 Winkel dritteln . . . . . 75
  - 6.2.2 Konstruierbare Winkel mit natürlichem Winkelgrad . . . . . 75
  - 6.2.3 Die Dreiteilung des Winkels mit der Konchoide . . . . . 75
  - 6.2.4 Die n-Teilung des Winkels mit der archimedischen Spirale . . . . . 75
  - 6.2.5 Winkeldritteln mit der Trisektrix und anderen Kurven . . . . . 75
- 6.3 Würfel verdoppeln, Delisches Problem . . . . . 75
- 6.4 Die konstruierbaren n-Ecke . . . . . 76
  - 6.4.1 Das Siebeneck oder Heptagon . . . . . 76
  - 6.4.2 Welche n-Ecke sind konstruierbar? . . . . . 76
- 6.5 Kreis quadrieren . . . . . 76
  - 6.5.1  $\pi$ -Konstruktion als neuer Problemtypus . . . . . 76
  - 6.5.2 Die Quadratrix . . . . . 76
  - 6.5.3 Archimedes, Leonardo da Vinci und Weiteres . . . . . 76
- 6.6 Zirkel, Lineal und Parabellineal . . . . . 76
  - 6.6.1 Gleichungen dritten Grades und Quasikonstruktionen . . . . . 76
  - 6.6.2 Weitere exakte Konstruktionen mit Parabellineal . . . . . 76
- 6.7 Archimedes und die Quadratur der Parabel . . . . . 76
- 7 Kegelschnitte . . . . . 77**
- 7.1 Kegelschnitte, die berühmteste Kurvenfamilie . . . . . 77
  - 7.1.1 Allgemeine 2D-Quadrikgleichung . . . . . 77
  - 7.1.2 Fazit zu den Quadriken . . . . . 77
- 7.2 Gemeinsame Konstruktionen . . . . . 77
  - 7.2.1 Faden-Konstruktionen . . . . . 77

7.2.2	Leitgeraden-Konstruktion aller Kegelschnitte . . . . .	77
7.2.3	Leitkreis-Konstruktion . . . . .	77
7.3	Beweise mit Dandelin'schen Kugeln . . . . .	77
7.3.1	Dandelin'sche Kugeln für die Ellipse . . . . .	77
7.3.2	Dandelin'sche Kugel für die Parabel . . . . .	77
7.3.3	Dandelin'sche Kugeln für die Hyperbel . . . . .	77
7.3.4	Ellipsensalami . . . . .	78
7.4	Namensgeheimnis der Kegelschnitte . . . . .	78
7.5	Reflexion und Tangenten an Kegelschnitten . . . . .	78
7.5.1	Tangenten, Leitkreis und Leitgerade . . . . .	78
7.5.2	Tangenten- und Normalengleichungen bei Kegelschnitten . . . . .	78
7.5.3	Reflexion an den Kegelschnitten . . . . .	78
7.6	Anwendungen der Kegelschnitte . . . . .	78
7.6.1	Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Formen in unserer Welt . . . . .	78
7.6.2	Anwendungen, die die Reflexionseigenschaften nutzen . . . . .	78
7.6.3	Projektion der Kegelschnitte . . . . .	78
7.7	Extras und Aufgaben . . . . .	78
7.7.1	Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel . . . . .	79
7.7.2	Spannende Weiterführungen und Aufgaben . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Kurven mit Drehwurm . . . . .</b>	<b>103</b>
8.1	Spiralen . . . . .	103
8.1.1	Archimedische Spirale . . . . .	103
8.1.2	Die Königin der Spiralen . . . . .	103
8.1.3	Spiralen, systematisch betrachtet und frei erfunden . . . . .	103
8.2	Rosetten . . . . .	103
8.2.1	Grundlage für die Rosetten . . . . .	103
8.2.2	Rosette als Fußpunktkurve der Astroide . . . . .	103
8.2.3	Rosetten mit variabler Blattgröße . . . . .	103
8.3	Rollkurven . . . . .	103
8.3.1	Zykloiden . . . . .	103
8.3.2	Trochoiden . . . . .	103
8.3.3	Rollende Parabel und die Kettenlinie . . . . .	103
8.4	Schwingungen . . . . .	104
8.4.1	Sinus- und Kosinusschwingung . . . . .	104
8.4.2	Lissajous-Kurven . . . . .	104
<b>9</b>	<b>Besondere Erzeugungsweisen für Kurven . . . . .</b>	<b>105</b>
9.1	Fußpunktkurven . . . . .	105
9.1.1	Fußpunktkurve einer Parabel . . . . .	105
9.1.2	Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben . . . . .	106
9.1.3	Negative Fußpunktkurven . . . . .	116
9.2	Enveloppen, Evoluten, Involuten, Evolventen . . . . .	119
9.2.1	Hüllkurven allgemein . . . . .	119

- 9.2.2 Naum-Gabo-Kurven und grundlegendes Vorgehen . . . . . 119
- 9.2.3 Parabel als Hüllkurve mit der Extremum-Methode . . . . . 119
- 9.2.4 Astroide und die rutschende Leiter . . . . . 119
- 9.3 Evoluten als Hüllkurven von Normalenscharen . . . . . 119
  - 9.3.1 Evolute einer Parabel . . . . . 119
  - 9.3.2 Kurvenpaare vom Typ: Involute und Evolute . . . . . 119
  - 9.3.3 Evolventen und Parallelkurven . . . . . 119
- 9.4 Reflexion und Kaustiken . . . . . 119
  - 9.4.1 Kardioide, die Herzkurve . . . . . 120
  - 9.4.2 Nephroide, die Nierenkurve . . . . . 124
  - 9.4.3 Reflexionen an beliebigen Kurven . . . . . 134
- 9.5 Inversion am Kreis . . . . . 134
  - 9.5.1 Erste Erfahrungen mit der Kreisspiegelung . . . . . 134
  - 9.5.2 Inversion von Kurven . . . . . 134
  - 9.5.3 Kartesische Abbildungsgleichungen . . . . . 134
  - 9.5.4 Anallagmatische Kurven . . . . . 134
  - 9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben . . . . . 135
  - 9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben . . . . . 140
- 9.6 Exoten-Kurven . . . . . 147
  - 9.6.1 Kurven mit natürlicher Gleichung . . . . . 147
  - 9.6.2 Klothoide . . . . . 148
  - 9.6.3 Traktrix oder Schleppkurve . . . . . 148
  - 9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus . . . . . 149
- 10 Didaktische Übersicht . . . . . 157**
- 10.1 Grundlegendes zur Didaktik der Kurven . . . . . 157
  - 10.1.1 Das Thema Kurven heute . . . . . 157
  - 10.1.2 Blick zurück und nach vorn . . . . . 157
  - 10.1.3 Didaktische Gründe für den Softwareeinsatz . . . . . 157
  - 10.1.4 Wie kann man das freie Erkunden anregen? . . . . . 157
  - 10.1.5 Was heißt eigentlich „Verstehen“? . . . . . 157
- 10.2 Was passt zu welchem Vorwissen? . . . . . 157
  - 10.2.1 Der Start, geeignet für die Jüngsten . . . . . 157
  - 10.2.2 Der zweite Schritt, geeignet für die Jugendlichen . . . . . 157
  - 10.2.3 Letzter Schritt in die Freiheit . . . . . 157
  - 10.2.4 Blackbox-Whitebox-Prinzip . . . . . 157
  - 10.2.5 Begabtenförderung . . . . . 157
- 10.3 Lehramt Mathematik, Mathematik BA u.s.w . . . . . 157
- 11 Anhang: Elemente der Analysis für Kurven . . . . . 159**
- 11.1 Kurven im Blick der Analysis . . . . . 159
- 11.2 Steigung und Ableitung . . . . . 159
  - 11.2.1 Steigung und Ableitung, explizit kartesisch . . . . . 159
  - 11.2.2 Implizite kartesische Ableitung . . . . . 159

11.2.3	Steigung und Ableitung in Parameterdarstellung . . . . .	159
11.2.4	Steigung bei Polarkurven . . . . .	159
11.2.5	Gleichungen von Tangente und Normale . . . . .	159
11.3	Flächen und Volumina der Rotationskörper . . . . .	159
11.3.1	Fläche bei Funktionen und expliziten Gleichungen . . . . .	159
11.3.2	Kurven in Parameterdarstellung . . . . .	159
11.3.3	Flächen bei Polarkurven . . . . .	159
11.3.4	Volumen von Rotationskörpern . . . . .	160
11.4	Bogenlänge . . . . .	160
11.4.1	Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven . . . . .	160
11.4.2	Bogenlänge bei Polarkurven . . . . .	160
11.5	Krümmungen . . . . .	160
11.5.1	Definition der Krümmung und interaktive Zugänge . . . . .	160
11.5.2	Herleitung der kartesischen Krümmungsformel aus der Definition . . . . .	160
11.5.3	Krümmungsformel für Polarkurven . . . . .	160
11.5.4	Orientierung von Kurven . . . . .	160
11.5.5	Wirkung des Vorzeichens der Krümmung . . . . .	160

# Aufgabenverzeichnis

Aufgabe 3.1	Visuelles Prüfen von Termumformungen	8
Aufgabe 3.2	Erkunden der Pascal'schen Schnecken	11
Aufgabe 3.3	Erkunden von Konchoiden zu allerlei Wanderkurven $C$	13
Aufgabe 3.4	Der Höhenschnittpunkt wandert	17
Aufgabe 3.5	Strophoide zu einer waagerechten Geraden	20
Aufgabe 3.6	Kreis-Strophoiden	22
Aufgabe 3.7	Im Umfeld der Cissoiden	27
Aufgabe 3.8	Cissoiden bezogen auf Kegelschnitte	29
Aufgabe 4.1	Weitere Eigenschaften der engen Versiera	32
Aufgabe 4.2	Der gemeinsame Schwimmgürtel-Torus	34
Aufgabe 4.3	Erkundungen mit der allgemeinen Versiera	36
Aufgabe 4.4	Weitere bipolare Kurven	39
Aufgabe 4.5	Lemniskaten-Eigenschaften	43
Aufgabe 4.6	Parameterdarstellungen der Lemniskate	46
Aufgabe 4.7	Booth'sche Ovale und Booth'sche Lemniskaten	48
Aufgabe 4.8	Andere Konstruktionen für die Geronon'sche Lemniskate	52
Aufgabe 4.9	Mit der Inversion spielen	55
Aufgabe 5.1	Variationen zu Topfblumen	60
Aufgabe 5.2	Erkundungen des Zweiblattes	62
Aufgabe 5.3	Zweikeimblatt im Wind	64
Aufgabe 5.4	Kurvenfamilie mit isolierten Punkten im Grenzfall	65
Aufgabe 5.5	Baron de Sluzes Familie als Cissoiden-Familie	68
Aufgabe 5.6	Raumverwandte der Kurven	71
Aufgabe 7.1	Krümmungskreise der Hyperbel und der Parabel	79
Aufgabe 7.2	Raster mit Kreis- und Parallelscharen	81
Aufgabe 7.3	Konfokale Ellipsen und Hyperbeln	84
Aufgabe 7.4	Konjugierte Richtungen	86
Aufgabe 7.5	Parabel als Vorstufe zu Bézierkurven	89
Aufgabe 7.6	Pol und Polare für die Parabel	91
Aufgabe 7.7	Die orthoptische Kurve zur Parabel	93
Aufgabe 7.8	Elementare Ortsaufgaben	95
Aufgabe 7.9	Quadrat im Dreieck und Weiteres	97
Aufgabe 7.10	Das breite Kreuz	99
Aufgabe 7.11	Die drei ??? tauchen auf	100
Aufgabe 9.1	Sluze-Konchoiden als Fußpunktkurven der Parabel?	106
Aufgabe 9.2	Fußpunktkurven der Ellipsen	108
Aufgabe 9.3	Fußpunktkurven der Hyperbeln	111
Aufgabe 9.4	Fußpunktkurven der Steiner-Kurve und der Astroide	113
Aufgabe 9.5	Fußpunktkurve der Tschirnhaus-Kubik	116
Aufgabe 9.6	Die drei Tangenten	120

Aufgabe 9.7	Evolute der Kardioide . . . . .	122
Aufgabe 9.8	Evolute der Nephroide ist auch eine Nephroide . . . . .	124
Aufgabe 9.9	Fußpunktkurve der Nephroide mit dem Pol $Z$ . . . . .	128
Aufgabe 9.10	Kaustik der Kardioide ist die Nephroide . . . . .	130
Aufgabe 9.11	Analysisfragen bei der Nephroide . . . . .	132
Aufgabe 9.12	Inversion an einem Scheitel von Ellipse und Hyperbel . . . . .	135
Aufgabe 9.13	Inversion am Brennpunkt von Ellipse und Hyperbel . . . . .	137
Aufgabe 9.14	Inversion am Mittelpunkt von Ellipse und Hyperbel . . . . .	139
Aufgabe 9.15	Steiner-Kurve und ihre Inversion . . . . .	140
Aufgabe 9.16	Cassini'sche Kurven und ihre Inversion . . . . .	142
Aufgabe 9.17	Königin der Spiralen und ihre Inversion . . . . .	145
Aufgabe 9.18	Kettenlinie . . . . .	149
Aufgabe 9.19	Katenoid als Minimalfläche . . . . .	153

# 1 Einleitung

---

---



# 2 Werkzeugkasten

---

## Übersicht

2.1	Wie entsteht eine Kurve geometrisch? .....	3
2.2	Was bedeuten Gleichungen mit x und y? .....	3
2.3	Was sind Polarkoordinaten? .....	3
2.4	Was ist eine Parameterdarstellung? .....	4
2.5	Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen? .....	4
2.6	Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun? .....	4
2.7	Tipps für GeoGebra .....	4
2.8	Tipps zu weiterer Mathematik-Software .....	4

---

## 2.1 Wie entsteht eine Kurve geometrisch?

## 2.2 Was bedeuten Gleichungen mit x und y?

### 2.2.1 Punkte und Geraden

### 2.2.2 Kreise und Grundlegendes

### 2.2.3 Allgemeine Kurvengleichung und Verschiebung

## 2.3 Was sind Polarkoordinaten?

### 2.3.1 Polarkoordinaten lesen und verstehen

### 2.3.2 Polarkurven

### 2.3.3 Zeichnen von Polarkurven

### 2.3.4 Gekoppelte polar-kartesische Darstellung von Kurven

## **2.4 Was ist eine Parameterdarstellung?**

2.4.1 Schnelle Zeichnung von Parameterkurven

2.4.2 Parameterdarstellung doppelt-kartesisch

2.4.3 Gebiet der Ebene in Parameterdarstellung

2.4.4 Wie rechnet man eine Darstellung in eine andere um?

## **2.5 Was sind Kurven und ihre grundlegenden Kurventypen?**

2.5.1 Was ist eine algebraische Kurve?

2.5.2 Was ist eine transzendente Kurve?

## **2.6 Was haben Kurven mit dem 3D-Raum zu tun?**

2.6.1 Wie entsteht eine Raumfläche aus einer Kurvengleichung?

2.6.2 Raumkurven und Raumflächen in anderen Darstellungen

## **2.7 Tipps für GeoGebra**

2.7.1 Wo findet man GeoGebra und die Website zum Buch?

2.7.2 Wichtige Tipps für Kurven

2.7.3 Was (noch) nicht geht in GeoGebra

## **2.8 Tipps zu weiterer Mathematik-Software**

2.8.1 Tipps für CAS-Taschenrechner

2.8.2 Tipps für Wolfram-Alpha und Mathematica

2.8.3 Tipps für Programme zur Raumgeometrie

2.8.4 Cinderella und andere starke Mathematik-Systeme

### 2.8.5 Blick zurück und nach vorn



# 3 Klassische Kurven ohne Ende

---

## Übersicht

3.1	Konchoiden: die Hundekurve und ihre Verwandten .....	7
3.2	Strophoiden: die Seilkurve und ihre Verwandten .....	16
3.3	Trisektrix .....	26
3.4	Cissoiden: die Efeukurve und ihre Verwandten .....	26
3.5	Analysis-Anwendungen bei den klassischen Kurven .....	30

---

## 3.1 Konchoiden: die Hundekurve und ihre Verwandten

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 3.1.1 Konchoide des Nikomedes, genannt Hundekurve

### Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen

Prüfen Sie durch Zeichnung in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung der Hundekurven-Gleichung

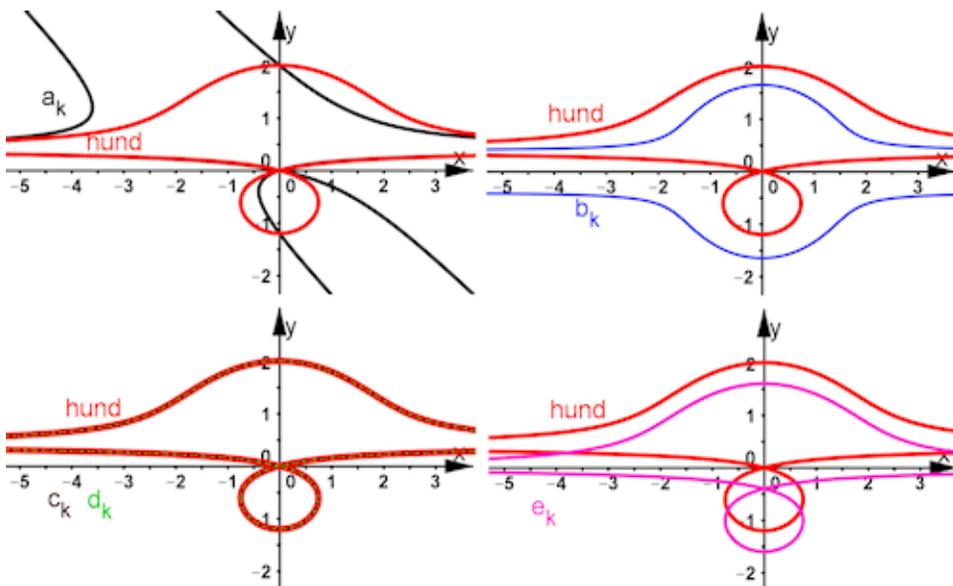
$$(x^2 + y^2) \cdot (y - a)^2 = k^2 y^2 \quad (\text{Gl. 3.1})?$$

- a)  $(x + y)^2 \cdot (y - a)^2 = k^2 y^2$       b)  $(x^2 + y^2) \cdot (y^2 - a^2) = k^2 y^2$   
 c)  $x^2(y - a)^2 = y^2(k^2 - (y - a)^2)$       d)  $(k + y - a)(k - y + a)y^2 = (x \cdot (y - a))^2$   
 e)  $x^2 y^2 = (y + a)^2(k^2 - y^2)$

### Hinweis

Beachten Sie, dass sich Strichrechnung und Quadrierung nicht gut vertragen. Die dritte binomische Formel ist für d) nützlich. Gleichung e) zeigt zwar die verschobene Hundekurve, aber es ist keine zulässige Gleichungsumformung. ◀

**Lösung** Die gemeinte Hundekurve  $(x^2 + y^2) \cdot (y - a)^2 = k^2 y^2$  ist rot dargestellt. In den folgenden Bildern ist  $a = 0.4$  und  $k = 1.6$ . Die zu testenden Kurven tragen den Index  $k$ .



**Abb. 3.1** Afg. 3.1  $a_k$  und  $b_k$  passen gar nicht. Die Gleichungen sind **sicher falsch** umgeformt. Es ist  $e_k$  eine verschobene Hundekurve, aber e) ist keine erlaubte Gleichungsumformung (s.u.). Die Kurven  $c_k$  und  $d_k$  liegen in diesem Fenster auf der Kurve. Das bleibt auch bei Variation von  $a$  und  $k$  so. Ein rechnerischer Beweis steht unten.

**Fehler für a) und für b)** : Binomische Formeln sind nicht beachtet.

**Beweis:  $c_k$  ist die Hundekurve:** In Gl. 3.1 linke Klammer auflösen und  $y^2(y-a)^2$  nach rechts bringen, dann  $y^2$  ausklammern.

**Beweis:  $d_k$  ist die Hundekurve:** In c) das Quadrat des linken Produktes nach außen schreiben (Potenzgesetz!). Rechts die äußere Klammer mit der 3. binomischen Formel in zwei Klammern auflösen und in diesen zusammenfassen.

**Beweis der Verschiebung:** Wie groß ist die Verschiebung? Die y-Achse wird geschnitten bei  $x=0$ , also gilt

$0 = (y+a)^2(k^2 - y^2)$ . Also ist der Doppelpunkt bei  $y = -a$  und die beiden anderen Schnittpunkte sind bei  $y = \pm k$ . Wenn es eine Hundekurve sein soll, müsste die Straße, die vorher bei  $y = a$  lag, nun  $y = 0$  sein. Eine Verschiebung um  $a$  nach unten kommt infrage.

Nachweis der Asymptoten-Eigenschaft: Eingesetzt in e) ergibt sich für  $y = 0$  nun  $x \cdot 0 = a^2k^2$ , eine Gleichung, die bei „echten“ Konchoiden (d.h.  $a \neq 0$  und  $k \neq 0$ ) nicht erfüllbar ist. Damit ist die x-Achse als Asymptote bestätigt.

Wir verschieben nun Gl. 3.1 um  $a$  nach unten, d.h.  $(x^2 + (y+a)^2)(y)^2 = k^2(y+a)^2$ , also  $x^2y^2 = (y+a)^2(k^2 - y^2)$ , also die Gleichung e). Damit ist bewiesen, dass die lilafarbene Kurve eine verschobene Hundekurve ist.

**GeoGebra-Datei** afg3.1-terme.ggb

### 3.1.2 Allgemeine Definition der Konchoiden

### 3.1.3 Polargleichungen der Konchoiden

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 3.1.4 Pascal'sche Schnecken oder die Limaçon

#### Aufgabe 3.2 Erkunden der Pascal'schen Schnecken

Bedenken Sie: Dies Buch kann zum Erkunden anregen und Verstehen ermöglichen. Nur Sie *selbst* können erkunden und verstehen.

1. Begründen Sie entsprechend Abschnitt 3.1.3.2 die drei Formen der Pascal'schen Schnecken mit Hilfe der polar-kartesischen Darstellung.
2. In Abb. 3.6 d) sehen Sie eine völlig andere Kurve, weil der Baum  $B$  nicht auf dem Kreisrand steht. Überlegen Sie, warum es für eine vollständige Übersicht über mögliche Formen reicht, wenn man  $B = (b, 0)$  auf der  $x$ -Achse verschiebt. Mit *reicht* ist dabei gemeint, dass man bei einer beliebigen Lage von  $B$  irgendwo im Koordinatensystem nur mehr Mühe hat und doch nichts anderes sehen kann, als mit geschickter gewählter Lage. Es reicht sogar  $b < a$  zu betrachten. Man formuliert auch: **Ohne Beschränkung der Allgemeinheit**, kurz **o. B. d. A.**, liege  $B$  auf der  $x$ -Achse links von  $M$ .
3. Erarbeiten Sie sich eine solche Übersicht. Überlegen Sie dabei, was Sie als *wesentlich verschieden* ansehen möchten.
4. In jeder Stellung von  $B$  könnten Sie auch noch die Leinenlänge  $k$  variieren.

#### Hinweis

Die interaktive Datei finden Sie hier unten. Wenn Sie ein schönes Poster mit den Kurvenbildern entwerfen wollen, schalten Sie in GeoGebra die Anzeige der Konstruktionselemente und der Achsen nach Belieben aus. Verwenden Sie z. B.: Export  $\rightarrow$  Grafik-Ansicht in die Zwischenablage.  $\blacktriangleleft$

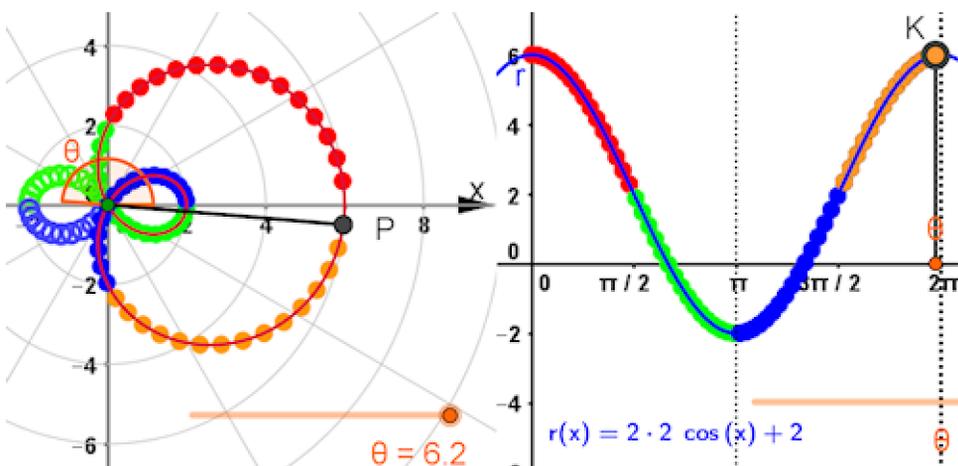


Abb. 3.2 Aufgabe 3.2 Top 1 Pascal'sche Schnecken polar-kartesisch

**Lösung: Polar-kartesische Darstellung** Die Polargleichung der Pascal'schen Schnecken ist

$r(\theta) = 2a \cos(\theta) \pm k$  (Gl. 3.5). Es handelt sich in der kartesischen Sicht also um eine parallel zur y-Achse verschobene Kosinusfunktion. Die Funktion  $\varrho(x) = 2a \cos(x)$  erstreckt sich in einem Streifen der Breite  $2 \cdot 2a$  um die x-Achse. Wird ein positives  $k$  addiert, so schneidet der Graph für  $k < 2a$  die x-Achse. Das kartesisch unter der x-Achse gelegene Kurvenstück erzeugt eine Schlaufe, sie wird immer kleiner je größer  $k$  wird. Im Bild ist  $k = 2$  und  $a = 2$ , der Wanderkreis ist nicht eingezeichnet. Er hat  $M = (a, 0)$  und  $R = a$ .

Ist  $k = 2a$ , so berührt der Graph der Kosinusfunktion die x-Achse, es entsteht polar die für die Kardioiden typische Spitze im Ursprung.

Ist  $k > 2a$ , so berührt der Graph der Kosinusfunktion die x-Achse gar nicht mehr, es entstehen polar die Pascal'schen Schnecken mit einer „Delle“ links, die den Ursprung nicht mehr erreichen.

**Zu Top2, 3 und 4** Wenn Sie die Stellung des Baumes B variieren wollen, So bauen Sie sich eine Datei, mit einem  $B = (b, 0)$  verschieblich auf der x-Achse. Z.B. die GeoGebra-Datei afg3.2-pascal.ggb.

Es gibt auch den Sonderfall mit zwei Kreisen Konchoid-Kreis-trivial.ggb.

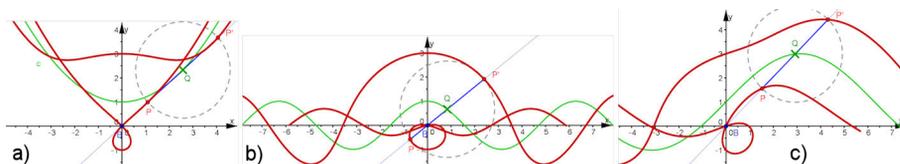
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 3.1.5 Formenreichtum der Konchoiden

#### Aufgabe 3.3 Erkunden von Konchoiden zu allerlei Wanderkurven $C$ .

Sie können das Folgende durchaus in einer einzigen GeoGebra-Datei experimentieren, eine solche finden Sie auf der Website zum Buch.



**Abb. 3.3** Abb.3.8 Allgemeine Konchoiden als Anregungen zu Aufgabe 3.3 a) einer Parabel, b) einer Kosinuskurve, c) einer variierten Sinuskurve

Die Variation der Parabel aus Abb. 3.7 birgt schon viele Überraschungen. Aber Sie brauchen lediglich den Eintrag für die Wanderkurve zu ändern, um ganz eigene Kreationen hervorzubringen. Alle geometrischen Konstruktionselemente sind sofort auf die neue Kurve oder Funktion bezogen.

1. Wählen Sie zunächst andere Leinenlängen  $k$ .
2. Wählen Sie andere Höhenlagen  $a$  der Parabel.
3. Wählen Sie andere Parabeln. Diese dürfen einen Parameter  $a$  enthalten.
4. Geben Sie in GeoGebra die in Abb. 3.7 gezeigte Gleichung mit Schiebereglern für  $a$  und  $k$  ein. Achten Sie (über den Eigenschaften-Dialog) darauf, dass  $a$  kleine Werte wie z. B. 0.1 annehmen kann. Finden Sie Ihre Lieblingsform.
5. Wählen Sie überhaupt andere Funktionen, wie es in Abb. 3.8 gezeigt ist.

#### Hinweis

Beachten Sie den Hinweis zu Aufgabe 3.2.

Auch die Herleitung der angegebenen Gleichung finden Sie unten. ◀

**Lösung** Die GeoGebra-Dateien finden auf der Seite „Konchoiden“ im Menu. Dort ist auch die nach der Gleichung aufzeichnete Kurve in GeoGebra.

$$\text{eins} = v = -1/4u^2 - a$$

$$\text{zwei} = (x - u)^2 + (y - v)^2 = k^2$$

$$\text{drei} = yu = xv$$

$$v = -a - \frac{u^2}{4}$$

$$(-u + x)^2 + (-v + y)^2 = k^2$$

$$uy == vx$$

**lo = Eliminate[{eins, zwei, drei}, {u, v}]**

$$a^2 (16x^4 + 32x^2y^2 + 16y^4) + a (8k^2x^4 + 8x^6 + 32x^4y + 8k^2x^2y^2 + 16x^4y^2 + 64x^2y^3 + 8x^2y^4 + 32y^5) = \\ -k^4x^4 + 2k^2x^6 - x^8 + 8k^2x^4y - 8x^6y + 16k^2x^2y^2 - 16x^4y^2 + 2k^2x^4y^2 - 2x^6y^2 + 8k^2x^2y^3 - \\ 16x^4y^3 + 16k^2y^4 - 32x^2y^4 - x^4y^4 - 8x^2y^5 - 16y^6$$

**lolinks = Subtract@@(lo)**

$$k^4x^4 - 2k^2x^6 + x^8 - 8k^2x^4y + 8x^6y - 16k^2x^2y^2 + 16x^4y^2 - 2k^2x^4y^2 + 2x^6y^2 - \\ 8k^2x^2y^3 + 16x^4y^3 - 16k^2y^4 + 32x^2y^4 + x^4y^4 + 8x^2y^5 + 16y^6 + a^2 (16x^4 + 32x^2y^2 + 16y^4) + \\ a (8k^2x^4 + 8x^6 + 32x^4y + 8k^2x^2y^2 + 16x^4y^2 + 64x^2y^3 + 8x^2y^4 + 32y^5)$$

**lolinkss = FullSimplify[lolinks]**

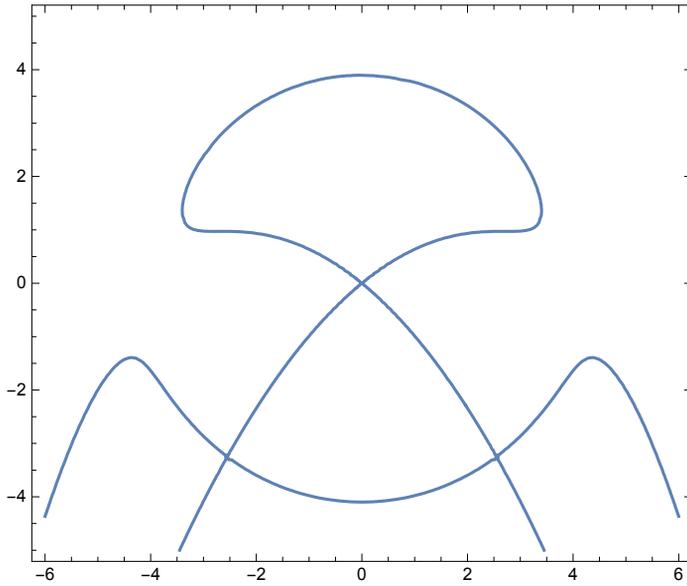
$$16a^2 (x^2 + y^2)^2 + 8a (x^2 + y^2) (k^2x^2 + (x^2 + 4y) (x^2 + y^2)) + \\ (k^2 - x^2 - y^2) (k^2x^4 - (x^2 + 4y)^2 (x^2 + y^2))$$

Mit Hinsehen umsortiert:

$$\text{kurve} = (x^2 + y^2) \left( 16a^2 (x^2 + y^2) + 8a (k^2x^2 + (x^2 + 4y) (x^2 + y^2)) + (x^2 + 4y)^2 (-k^2 + x^2 + y^2) \right) \\ (x^2 + y^2) \left( 16a^2 (x^2 + y^2) + (x^2 + 4y)^2 (-k^2 + x^2 + y^2) + 8a (k^2x^2 + (x^2 + 4y) (x^2 + y^2)) \right) == \\ k^2x^4 (-k^2 + x^2 + y^2)$$

**a = 0.1; k = 4; ContourPlot[kurve//Evaluate, {x, -6, 6}, {y, -5, 5}, AspectRatio → Automatic]**

**a=.; k=.**



**Zeichnung aus GeoGebra, passt**

Mathematica-Datei [afg3.3-cover-kurve.nb](#) Die Mathematica-Datei hierzu und eine entsprechende \*.pdf sind auch im Menu verlinkt.

## 3.2 Strophoiden: die Seilkurve und ihre Verwandten

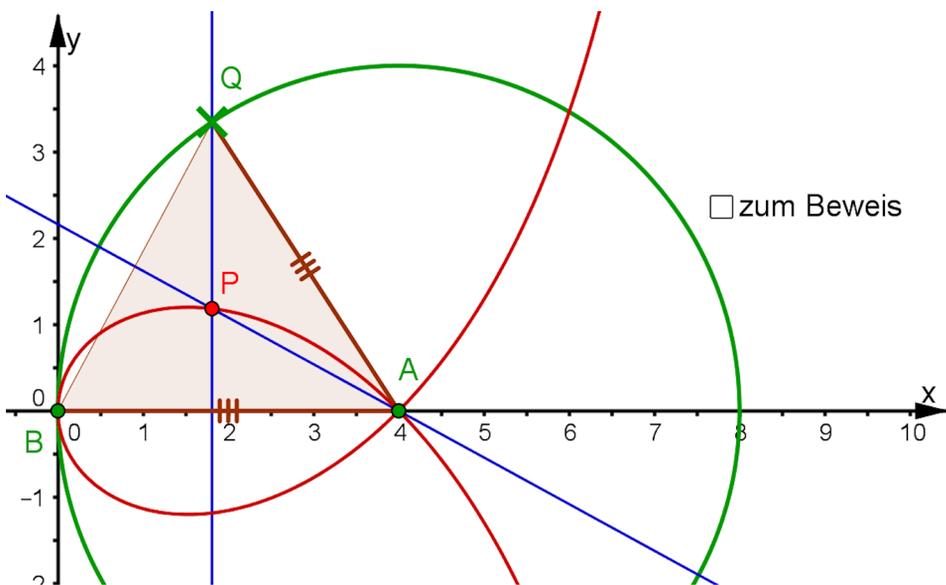
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 3.2.1 Gerade Strophoide

#### Aufgabe 3.4 Der Höhenschnittpunkt wandert

Der Text bezieht sich auf folgendeDort sind die Bezeichnungen so gewählt, dass ein Beweis dann leicht fällt. Es ergibt sich eine Strophoide in der Scheitel-Lage. Mit dem



**Abb. 3.4** Höhenschnittpunkt im Dreieck

Setze die Punkte  $B = (0, 0)$  und  $A(a, 0)$  mit beliebigem  $a$ .

Schlage um  $A$  einen Kreis mit dem Radius  $\overline{BA}$  und setze darauf  $Q$  zugfest.

Zeichne das Dreieck  $BAQ$  und konstruiere zu ihm zwei Höhengeraden.

Gesucht ist die Ortslinie des Höhenschnittpunktes  $P$ , wenn  $Q$  auf dem Kreis wandert.

Eintragen der Gleichung  $(2a - x)y^2 = x(x - a)^2$  (Gl.3.8) können Sie das bestätigen.

Beweisen Sie es auch geometrisch durch zusätzliches Eintragen von Konstruktionselementen in obiger Abb.

Beweisen Sie es durch Aufstellen der Gleichung für die so erzeugte Kurve.

#### Hinweis

Für den geometrischen Beweis ist es hilfreich,  $Q$  und die von dort ausgehende Höhe an der Geraden  $x = a$  zu spiegeln. Für den algebraischen Beweis verfolgt man die Schritte in Abschnitt 3.1.1.4 und noch die Tipps in Abschnitt 3.2.1.2. Beide Beweise findet man hier unten, aber versuchen Sie es erst selbst! ◀

**Lösung:** Die GeoGebra-Datei ist bei der Strophoiden im Menu verlinkt. Für den geometrischen Beweis folgen Sie dem Hinweis. Es ergibt sich das folgende Bild. Der Winkel  $\gamma = \angle QAB$  ist der Spitzenwinkel des offensichtlich gleichschenkligen Dreiecks  $QAB$ .

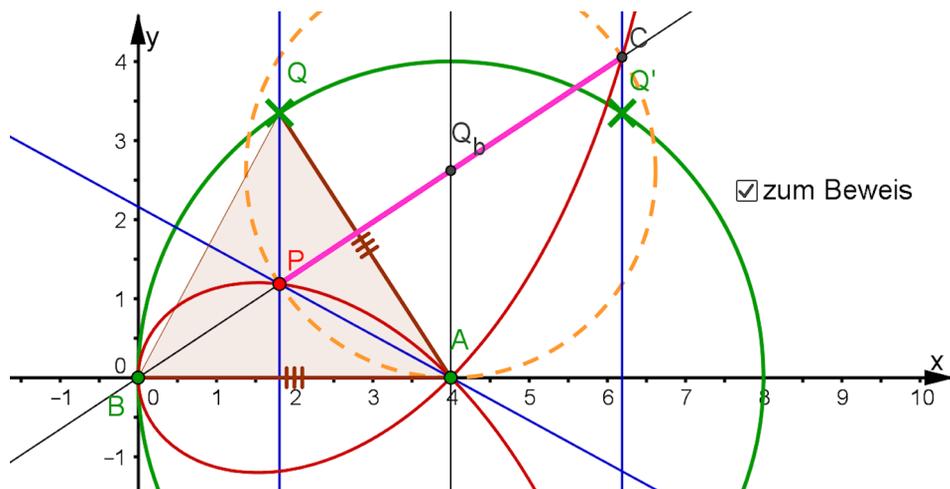


Abb. 3.5 Höhenschnittpunkt im Dreieck mit Beweiselementen

Dieser Winkel taucht in der Zeichnung nochmals als  $\gamma = \angle PQ_bA$  auf, denn die Schenkel dieser Winkel stehen senkrecht aufeinander. Zu zeigen bleibt, dass das Dreieck  $PQ_bA$  auch gleichschenkelig ist. Also: in dem kleinen Viereck, in dem  $\overline{BP}$  Diagonale ist, gilt  $\gamma + \varepsilon + \alpha = \pi$ , wenn man  $\alpha = \angle ABQ$  und  $\varepsilon = \angle APQ_b$  bezeichnet. Weiter gilt  $2\alpha + \gamma = \pi$ . Führt man das zusammen, folgt  $\varepsilon = \alpha$  und damit die Behauptung.

Nun existiert der gelbe Kreis, der der Konstruktionkreis aus der Definition der geraden Strophoide ist.

**Herleitung der Gleichung** Weg von  $Q = (u, v)$  ist  $(u - a)^2 + v^2 = a^2$  (Gleichung 1). Sei  $M = (\frac{u}{2}, \frac{v}{2})$  die Mitte von  $\overline{BQ}$ , dann gilt für die Gerade  $AP$ :  $y = -\frac{\frac{v}{2}}{a - \frac{u}{2}}(x - a)$  (Gleichung 2). Die Senkrechte durch  $Q$  bringt  $x = u$  (Gleichung 3). Gleichung 3 in 1 ergibt Gl. 4:  $x^2 - 2ax + v^2 = 0$  und in 2 wird nach Quadrieren Gl. 5:  $y^2(2a - x)^2 = v^2(x - a)^2$ . Eliminieren wir nun noch  $v^2$ , folgt  $y^2(2a - x)^2 = x(2a - x)(x - a)^2$ . Weil  $u = x = 2a$  kein Dreieck mehr ergeben kann, dürfen wir durch  $(2a - x)$  dividieren und erhalten  $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$ , die Strophoidengleichung 3.8. q.e.d.

GeoGebra-Datei stropho-hoehen-bew.ggb

### 3.2.2 Allgemeine Strophoide

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 3.2.3 Schiefe Strophoide

#### Aufgabe 3.5 Strophoide zu einer waagerechten Geraden

Wählen Sie als Kurve  $C$  die waagerechte Gerade  $y = c$  mit  $B = (0, 0)$  und  $A = (a, 0)$ .

1. Konstruieren Sie die zugehörige Strophoide und sehen Sie sich die auftretenden Formen an. Formulieren Sie Ihre Beobachtungen.
2. Warum haben Sie, auch wenn Sie  $B$  und  $A$  nicht variieren und nur beliebige  $c \geq 0$  zulassen, dennoch alle Strophoiden untersucht, bei denen die Kurve  $C$  eine Gerade parallel zu  $BA$  ist?
3. Raten Sie mit etwas Überlegung eine Asymptote (in Abhängigkeit von  $c$ ) dieser Strophoiden. Untermauern Sie Ihre Wahl dadurch, dass GeoGebra nur den einen direkt sichtbaren Schnittpunkt mit Ihrer Geraden hat. Welche besondere Lage hat dieser Schnittpunkt?
4. Stellen Sie die drei Gleichungen für  $Q$  und  $P$  auf (entsprechend Abschnitt ?? oder Abschnitt ??). Eliminieren Sie  $u$  und  $v$ . Es geht dieses Mal durchaus von Hand.
5. Überprüfen Sie Ihren Vorschlag für eine Asymptote an der Gleichung.
6. Zeigen Sie, dass die Kurve  $C : y = c$  von der Strophoide nie geschnitten wird.
7. Stellen Sie sich selbst Fragen und versuchen Sie wenigstens näherungsweise Antworten zu finden.

#### Hinweis

Eine interaktive Datei und die Lösungen finden Sie hier unten. ◀

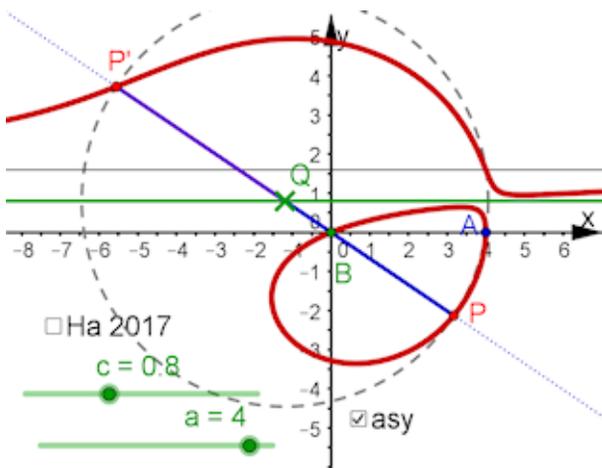
#### Lösung:

**Zu 1.:** Es ergibt sich eine geschlossene Teilkurve durch  $B$  und  $A$  unterhalb der Geraden  $y = c$  und ein rechts und links ins Unendliche reichender Kurvenast über dieser Geraden. Er scheint auch Fälle zu geben, bei denen in der Nähe von  $A$  „in einem Zug“ gezeichnet werden kann. Das kann aber bei näherem Zusehen nicht bestätigt werden.

**Zu 2.:** Für negative  $c$  erhält man die an der  $x$ -Achse gespiegelte Version.

**Zu 3.:** Wenn man  $Q$  zieht, erkennt man, dass  $P$  für außen liegende  $Q$  die  $x$ -Achse nicht erreichen kann, ebenso wenig kann  $P'$  die Gerade  $y = 2c$  erreichen. Diese Gerade ist damit die Asymptote. Ist  $P = B$ , so folgt  $P' = (a, 2c)$ . Dieser Punkt ist dann der einzige Schnittpunkt mit der Asymptote. Siehe Top 5.

**Zu 4.:** Gl.1:  $v = c$ , Gl.2:  $(x - u)^2 + (y - v)^2 = (a - u)^2 + c^2$ , Gl.3  $yu = xv$ . Wenige Zeilen führen zu  $y(x^2 + y^2 - a^2) = 2c(x^2 + y^2 - ax)$ . Eintragen in die GeoGebra-Datei zeigt dieselbe Kurve.



**Abb. 3.6 Strophoide zu einer waagerechten Geraden**

Setze die Gerade  $y=c$  und die Punkte  $B = (0, 0)$  und  $A(a, 0)$  mit beliebigen  $c$  und  $a$ .

Setze  $Q$  zugfest auf die Gerade und schlage um  $Q$  einen Kreis mit dem Radius  $\overline{QA}$ .

Die Schnittpunkte der Geraden  $BQ$  und des Kreises sind die gesuchten Punkte  $P$  und  $P'$ . Deren Ortskurve ist die gesuchte Strophoide.

5.:  $y = 2c$  einsetzen bringt:  $2c(x^2 + 4c^2 - a^2) = 2c(x^2 + 4c^2 - ax)$ . Es bleibt  $a = x$ , damit gibt es nur den einen in Top 3. überlegten Schnittpunkt. Die Annäherung außen ergibt sich geometrisch.

6.:  $y = c$  einsetzen bringt:  $c(x^2 + c^2 - a^2) = 2c(x^2 + c^2 - ax)$  und bald  $-c^2 = (x - a)^2$ . Das ist bei  $c > 0$  für kein  $x$  erfüllbar.

7.: Was erhält man, wenn  $A = (a, b)$  ist mit  $b \neq 0$ ?

GeoGebra-Datei: afg3.5-stropho-waag.ggb

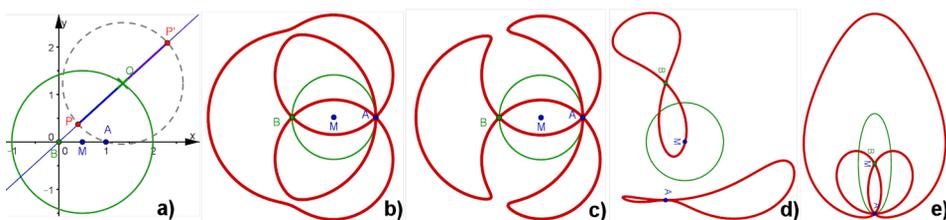
# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 3.2.4 Noch allgemeinere Strophoiden

### Aufgabe 3.6 Kreis-Strophoiden

Bei den Pascal'schen Schnecken regt Aufgabe 3.3 das Nachdenken über *wesentliche* Veränderungsmöglichkeiten an. Hier könnten  $B$  und  $A$  feste Punkte sein und die Form der Strophoide hängt dann von der Lage und Größe des Wanderkreises ab. Nur wegen der Gesamtgröße des Bildes ist in Abb. 3.7 dennoch  $a$  variiert.



**Abb. 3.7** Buch Abb. 3.15 **Strophoide zu Kreisen**

Setze die Punkte  $B = (0, 0) = O$  und  $A(a, 0)$  mit beliebigem  $a$ .

Weiter gibt es einen Kreis um ein  $M$ . Zunächst ist  $M$  die Mitte von Strecke  $BA$ . Setze  $Q$  zugfest auf den Kreis und schlage um  $Q$  einen Kreis mit dem Radius  $\overline{QA}$ .

Die Schnittpunkte der Geraden  $BQ$  und des Kreises sind die gesuchten Punkte  $P$  und  $P'$ . Deren Ortskurve ist die gesuchte Strophoide. Statt des Kreises ist bei e) eine Ellipse genommen.

- In Abb. 3.7 ist  $B$  im Ursprung und  $A = (a, 0)$ . Der Parameter  $a$ , der Mittelpunkt  $M$  des Wanderkreises und der Radius  $\varrho$  erfüllen bei b)  $a = 4$ ,  $M = (1.99, 0)$ ,  $\varrho = 2$ , bei c)  $a = 4$ ,  $M = (2.01, 0)$ ,  $\varrho = 2$  und bei d)  $a = 3$ ,  $M = (1.5, 0.5)$ ,  $\varrho = 1$ . Dabei sind c) und d) um  $90^\circ$  gedreht dargestellt. Bauen Sie die Konstruktion mit fein steuerbaren Schieberegler für die Parameter nach und lassen Sie sich von der Formenvielfalt überraschen.
- Machen Sie sich klar, dass es Geraden gibt, die diese Strophoiden sechsmal schneiden. Also muss die algebraische Gleichung mindestens den Grad 6 haben. Aufstellung einer Gleichung ist mit „Eliminate“ möglich – siehe Website – aber der Aufwand lohnt nicht recht. *Hinsehen ist besser.*
- Der Sonderfall  $M = (\frac{a}{2}, 0)$ ,  $\varrho = \frac{a}{2}$  zeigt als Ortslinie nur zwei Kreise, sehen Sie sich das an. Die zugehörige Gleichung ist:  

$$(x^2 + y^2 - a(x + y)) \cdot (x^2 + y^2 - a(x - y)) = 0.$$
 Sie **zerfällt in zwei Faktoren**. Zeigen Sie, dass dies tatsächlich die beiden Kreise sind, die man sieht. Sehen Sie sich aber auch an, dass nicht  $P$  den einen Kreis und  $P'$  den anderen Kreis erzeugt. Mehr zu Gleichungen, die in Produkte zerfallen, finden Sie vor allem in Abschnitt 5.3.3.
- Zeigen Sie durch ein einfaches geometrisches Argument, dass sich mit  $M = A$  **immer allgemeine Kreis-Konchoiden** ergeben und dass diese für  $\varrho = a$  Pascal'sche Schnecken sind.

**Lösung:** GeoGebra-Datei Strophoide-kreis.ggb Hiermit erreichen Sie vor allem Figuren wie oben b) und c). Aber bei Beachtung von Top 3. und 4. können Sie auch die dort genannten Phänomene sehen. Diese zeigt die folgende Abbildung. Obige Abbildungen d) und e) sind um  $90^\circ$  gedreht und mit einen Dateien im Menu untergebracht.

**Zu 2.:** Denken Sie die sechsmal schneidenden Geraden. Wenn Sie auf die Rechnung sehen wollen, sie diese von Mathematica geliefert:

$$\text{eins} = (u - m)^2 + v^2 == \rho^2$$

$$(-m + u)^2 + v^2 == \rho^2$$

$$\text{zwei} = (-u + x)^2 + (-v + y)^2 == (a - u)^2 + v^2$$

$$\text{drei} = yu == xv$$

$$(-u + x)^2 + (-v + y)^2 == (a - u)^2 + v^2$$

$$uy == vx$$

$$\text{lo} = \text{Eliminate}\{\{\text{eins}, \text{zwei}, \text{drei}\}, \{u, v\}\} // \text{Simplify}$$

$$4 \left( a^3 m x^2 + a m (2m - x) x (x^2 + y^2) + (-a x + x^2 + y^2)^2 \rho^2 \right) == a^4 (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 (4m^2 - 4m a^2) \\ a^2 \left( 4m^2 x^2 + 4m x (x^2 + y^2) - 2 (x^2 + y^2)^2 \right)$$

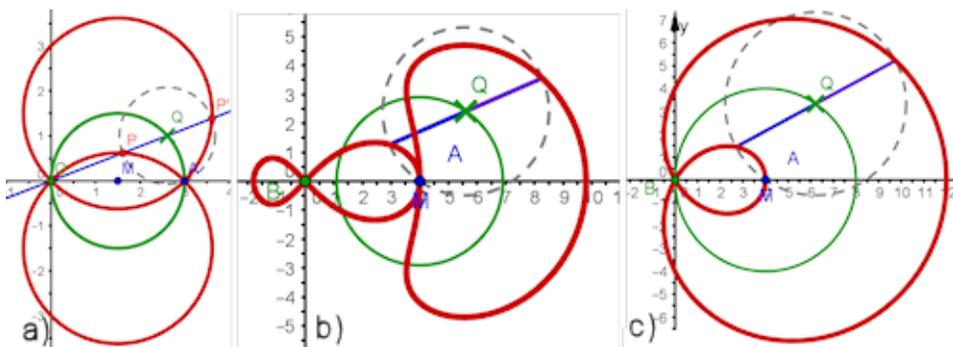
$$\text{li} = \text{Subtract}@@(\text{lo}) == 0$$

$$-a^4 (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 (4m^2 - 4m a^2) - a^2 \left( 4m^2 x^2 + 4m x (x^2 + y^2) - 2 (x^2 + y^2)^2 \right) + \\ 4 \left( a^3 m x^2 + a m (2m - x) x (x^2 + y^2) + (-a x + x^2 + y^2)^2 \rho^2 \right) == 0$$

$$\text{lo} // \text{FullSimplify}$$

$$4 \left( a m x (a^2 x + (2m - x) (x^2 + y^2)) + (-a x + x^2 + y^2)^2 \rho^2 \right) == a^4 (x^2 + y^2) + \\ (x^2 + y^2)^2 ((-2m + x)^2 + y^2) + a^2 \left( 4m^2 x^2 + 4m x (x^2 + y^2) - 2 (x^2 + y^2)^2 \right)$$

Das zweite Produkt auf der rechten Seite hat tatsächlich den Grad 6.



**Abb. 3.8 Strophoide: 2 Kreise + Konchoide**

a) Sonderfall: Top 3. zwei Kreise, b) Top 4. für  $M = A$  Kreiskonchoide, c) Top 4. für  $\varrho = a$  Pascal'sche Schnecke

**Zu 3.:** Überzeugen Sie sich in der GeoGebra-Datei „Sonderfall“ unten auf der Strophoiden-Seite im Menu, dass zwei Kreise entstehen. Sie sehen sie auch hier in der Abb. 3.8 a)

Die Rechnung ist:

$$\text{eins} = (u - a/2)^2 + v^2 == a^2/4$$

$$\left(-\frac{a}{2} + u\right)^2 + v^2 == \frac{a^2}{4}$$

$$\text{zwei} = (-u + x)^2 + (-v + y)^2 == (a - u)^2 + v^2$$

$$\text{drei} = yu == xv$$

$$(-u + x)^2 + (-v + y)^2 == (a - u)^2 + v^2$$

$$uy == vx$$

$$\text{lo} = \text{Eliminate}[\{\text{eins}, \text{zwei}, \text{drei}\}, \{u, v\}] // \text{Simplify}$$

$$a \left( a^3 (x^2 - y^2) - 2a^2 x (x^2 + y^2) + 2ay^2 (x^2 + y^2) + 2x (x^2 + y^2)^2 \right) == (x^2 + y^2)^3$$

$$\text{li} = \text{Subtract}@@(\text{lo}) == 0$$

$$-(x^2 + y^2)^3 + a \left( a^3 (x^2 - y^2) - 2a^2 x (x^2 + y^2) + 2ay^2 (x^2 + y^2) + 2x (x^2 + y^2)^2 \right) ==$$

0

**li//Factor**

$$-(-a^2 + x^2 + y^2)(-ax + x^2 - ay + y^2)(-ax + x^2 + ay + y^2) == 0$$

Das sind drei Kreise als Produkt. Der vordere aber entsteht nur, weil die blaue Ursprungsgerade gar nicht definiert ist, wenn  $Q$  in den Ursprung gewandert ist. Darum entfällt dieser Kreis als Lösung und die beiden roten Kreise im Abb.3.8 a) bleiben übrig.

**Zu 4.:** Abb. 3.8 b) zeigt, dass  $\overline{AQ}$  in der Stellung  $M = A$  konstant ist. Damit diese Strecken als  **feste** Leine auffassbar und es handelt sich um eine Hundekurven-Konstruktion, bei der der „Herr“ auf einem Kreis läuft. Es ist also eine Konchoide, bei der der Baum nicht auf dem Kreis-Weg steht.

Bei Abb.3.8 c) dagegen steht der Baum auf dem Kreis, wie es für die Pascal'schen Schnecken gefordert ist. Übrigens: erreicht man alle Pascal'schen Schnecken mit dieser allgemeinen Strophoiden-Konstruktion?

### 3.3 Trisektrix

#### 3.3.1 Die Trisektrix von Maclaurin

### 3.4 Cissoiden: die Efeukurve und ihre Verwandten

#### 3.4.1 Die Cissoide des Diokles

#### 3.4.2 Allgemeine Cissoide

#### 3.4.3 Die allgemeine Polargleichung der Cissoide

#### 3.4.4 Die klassischen Kurven als Cissoiden

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 3.4.5 Geometrie aus der Polargleichung erfinden

#### Aufgabe 3.7 Im Umfeld der Cissoiden

Anregungen zum Erkunden mit diesen Erkenntnissen

1. Erzeugen Sie die Polarkurve  $r(\theta) = a \tan(\theta)$ .
2. Konstruieren Sie die Strophoide als Cissoide aus ihrer Polargleichung 3.10  

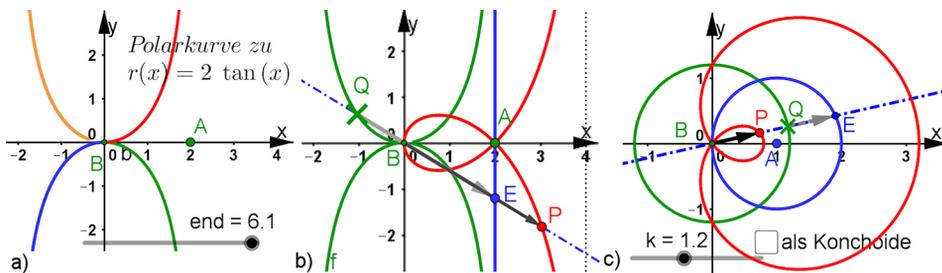
$$r = \frac{a}{\cos(\theta)} - a \tan(\theta)$$
3. Erzeugen Sie die Polarkurve für eine Pascal'sche Schnecke  $r(\theta) = 2a \cos(\theta) - k$  in einer entschleunigten Art (siehe Abschnitt 2.3.3.2, und sehen Sie sich den Durchlauf an).
4. Konstruieren Sie eine Pascal'sche Schnecke mit Schlaufe als Cissoide.
5. Experimentieren Sie mit der kartesischen Gleichung 3.17 der Variations-Cissoide. Geben Sie freie Konstanten  $a$  und  $c$  und die Gleichung in GeoGebra ein und finden Sie alle *wesentlichen Formen*. Es sollten mindestens fünf sein, ein exakter Kreis ist dabei.

#### Hinweis

Zu 1. und 3.: Nehmen Sie z. B. das Werkzeug Kurve[...] aus Abschnitt 2.3.3.1

Zu 5.: Siehe Abb. 3.23 im Buch. Achten Sie darauf, dass Sie die Parameter *fein* einstellen können. Variieren Sie  $a$  bei festem  $c$ , aber auch  $c$  bei festem  $a$ . ◀

**Lösung** Es empfiehlt sich Abschnitt 3.4.5 zu lesen.



**Abb. 3.9 Aufgabe 3.7 Umfeld der Cissoiden**

- a) Top 1., Polarkurve zum Tangens,
- b) Top 2, Geometrie einer neuen Konstruktion der Strophoide durch Deutung der Polargleichung als Cissoide
- c) Top 4., Geometrie einer neuen Konstruktion der Pascal'schen Schnecke mit Schlaufe durch Deutung der Polargleichung als Cissoide

**Zu 1.:** Gezeigt ist in Abb. ?? die in der Aufgabenstellung geforderte Polargleichung. Dass im  $x$  anstelle von  $\theta$  steht, hat wohlüberlegte Gründe. 1. Sieht man beim Anzeigen den vertrauten Tangens. 2. Für eine polar-kartesische Darstellung, braucht man es genau so. 3. In den Kurvenbefehl muss man zweimal  $r$  eintragen, das sieht dann so aus:

Kurve[r(t) cos(t), r(t) sin(t), t, 0, end] , das ist mathematisch sauber und sicher.

GeoGebra-Datei polarkurve-tangens.ggb

In der Datei können Sie noch die implizite Kurve Kurve zuschalten. Versuchen Sie eine implizite kartesische Gleichung dafür herzuleiten.

**Guter Rat:** *Zettel holen, selbst denken, schreiben rechnen, Zettel holen, selbst denken, schreiben, rechnen, Zettel holen, selbst denken, schreiben, rechnen!*

Es ist erstaunlich einfach: Mit den Grundgleichungen 2.6 folgt  $\frac{y}{x} = \tan(t)$  und dann  $x^2 = ay \cos(t)$  und  $x = a \sin(t)$ . Bald hat man  $x^4 = y^2(a^2 - x^2)$ . Das war's. Man sieht auch gleich die Symmetrien, die Asymptoten  $x = \pm a$  und die breite Berührung der x-Achse, wie es Abb. ?? auch zeigt.

**Zu 2.:** Da der Subtrahend im blauen Kasten Seite 72 auf die Kurve  $C_1$  und der Minuend auf Kurve  $C_2$  verweist, folgt aus der Polargleichung 3.10 der Strophoide, dass die eben in Top 1. betrachtete Kurve das erzeugende  $Q$  tragen muss. Die blaue Gerade  $x = a$  gibt  $E$  und den grauen Vektor  $\overrightarrow{QE}$  her. So ist es in Abb. ?? b) gezeigt. Zur entsprechenden Deutung der Polargleichung 3.19 als Cissoide sehen Sie sich Abb. 3.25 Seite 71 im Buch an.

**Zu 3.:** Dieses ist mit dem Schalter **slow** in die Datei pol-kart-pascal-pkte.ggb eingebaut, siehe Aufgabe 3.2.

**Zu 4.:** Abb. 3.23 Seite 70 im Buch zeigt schon Vieles. Alle diese Cissoiden sind symmetrisch zur x-Achse. Sie haben die Nullstelle  $x = c - 2a$ . Und für  $0 \leq c \leq 2a$  ist der Ursprung ein Punkt der Kurve.  $a$  verändert i.W. nur den Maßstab.

**Die folgenden Werte für  $c$  gelten für  $a = 2$ .**

*Typ<sub>1</sub>* ist mit  $c < -0.5$  im II. Quadranten monoton wachsend.

*Typ<sub>2</sub>* hat mit  $0.5 = c$  im II. Quadranten einen Sattelpunkt. Dort beginnt in der GeoGebra-Datei eine violette Kurve der Extrema, die im Ursprung endet. Sie ist mit Mathematica bestimmt worden.

*Typ<sub>3</sub>* ist mit  $-0.5 < c < 0$  im II. Quadranten ein „Knauf“.

*Typ<sub>4</sub>* ist mit  $c = 0$  ein exakter Kreis. Denn  $-xy^2 = (2a + x)x^2$  kann durch  $x$  dividiert werden, denn der Ursprung bleibt ein Kurvenpunkt, aber andere Punkte der y-Achse gehören geometrisch nicht zur Kurve. Es ist damit der Kreis um  $(-a, 0)$  mit Radius  $a$ .

*Typ<sub>5</sub>* ist mit  $0 < c < 4$  eine Schlaufe, mit der Trisektrix für  $c = 1$  und der Strophoide für  $c = 2$ .

*Typ<sub>6</sub>* ist  $c = 4$  die Cissoide des Diokles und hat eine Spitze im Ursprung.

*Typ<sub>7</sub>* ist für  $4 < c$  im I.Quadranten monoton wachsend mit senkrechter Steigung.

afg3.7-ctissoiden-vari.ggb

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 3.4.6 Noch allgemeinere Cissoiden

#### Aufgabe 3.8 Cissoiden bezogen auf Kegelschnitte

- Variieren Sie in der Situation aus Abb. 3.26 Seite 73 im Buch den Parabel-Parameter  $p$ .
- Probieren Sie andere Kegelschnitte aus dem Kegelschnitt-Menü aus. Konstruieren Sie mit ihnen Cissoiden.
- In welchem Sonderfall, in dem  $C_1$  und  $C_2$  Kreise sind, ist die Cissoide auch ein Kreis?

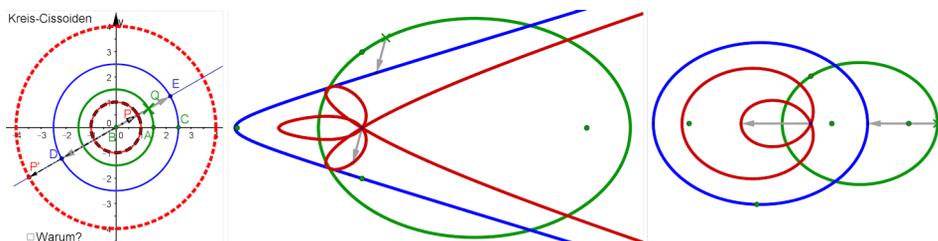
#### Hinweis

Die Dateien finden Sie auf der Website zum Buch. Die Verwendung von Kegelschnitten hat den Vorteil, dass sie in GeoGebra *direkt* verfügbar sind. Sie können auch andere kartesische Kurvengleichungen oder Polar- oder Parameterkurven mit dem Werkzeug Kurve[...] eingeben. Auch auf Ortslinien kann man zugestete Punkte setzen, daher sind sie als  $C_1$  für eine Cissoiden-Erfindung geeignet. Da Sie aber Schnittpunkte brauchen, reichen Ortslinien als  $C_2$  nicht aus. Sonst sind Ihrem Erfindungsreichtum keine Grenzen gesetzt.

Wenn Sie aus Ihren schönsten Kurven ein Plakat gestalten wollen, wie es Abb. 3.26 rechts andeutet, so *verbergen* Sie in GeoGebra alle störenden Konstruktionselemente. ◀

#### Lösung:

**Zu a)** Die Datei steht im Menü bei Cissoiden bei Bild 3.26 Seite 73.



#### Abb. 3.10 Aufgabe 3.8 Cissoiden der Kegelschnitte

Links zu Frage c)

Mitte und rechts zu b): Die Kegelschnitte sind jeder aus zwei auf die  $x$ -Achse gesetzten Brennpunkten und einem weiteren Punkt entstanden. Obwohl die Bilder reduziert sind, können Sie die Konstruktion sehen. Der kleine blaue Punkt ist der Ursprung, das grüne Kreuz ist  $Q$ . Man kann es aber auch ganz anders machen.

**Zu b)** Man kann immernoch an allen grünen Punkten ziehen und so die Wandlung der Formen beobachten. Aber auch ganz andere gegenseitige Lagen sind spannend.

**zu c)** Die Konstruktion ist offensichtlich. Aber warum berührt ein Kreis um  $E$  durch  $P$  den äußeren Cissoidenkreis? Die Dateien sind im Menü.

## 3.5 Analysis-Anwendungen bei den klassischen Kurven

# 4 Barocke Blüten und Früchte

---

## Übersicht

4.1	Versiera, die Hexenkurve .....	31
4.2	Neil'sche Parabel und andere Kubiken .....	38
4.3	Cassini'sche Kurven und andere bipolare Kurven .....	38
4.4	Lemniskaten und andere Gelenk Konstruktionen .....	43

---

## 4.1 Versiera, die Hexenkurve

### 4.1.1 Die (weite) Versiera

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 4.1.2 Die enge und die weite Versiera

### Aufgabe 4.1 Weitere Eigenschaften der engen Versiera

Verwenden Sie im Folgenden ein CAS wenigstens für Integrale, höhere Ableitungen und Krümmung (siehe Hinweis).

- Bestimmen Sie die rechts und links nicht begrenzte Fläche unter der engen Versiera.
- Zeigen Sie, dass die enge Versiera in ihren Schnittpunkten mit dem erzeugenden Kreis besondere Tangenten hat.
- Bestimmen Sie den Krümmungskreis für den Scheitel der engen Versiera.
- Berechnen Sie den Krümmungsradius für die Punkte  $(\pm a, a)$  und überlegen Sie eine Konstruktion für die beiden Krümmungskreise.

### Hinweis

Zu GeoGebra-CAS und TI-Nspire-CAS finden Sie Hilfen auf der Website zum Buch.

Auf <http://www.wolfram-alpha.com> können Sie z. B. folgende Einzelbefehle nutzen:

`Integrate[TermVonx, x]` ist der Befehl für das unbestimmte Integral.

`Integrate[TermVonx, {x, a, b}]` ist das bestimmte Integral.

`D[TermVonx, x]` die erste und `D[TermVonx, {x, 2}]` die zweite Ableitung. ◀

CAS	
1	$f(x) := 2r^3 / (r^2 + x^2)$ $\rightarrow f(x) := 2 \cdot \frac{r^3}{r^2 + x^2}$
2	$f'(x)$ $\rightarrow -4r^3 \cdot \frac{x}{r^4 + x^4 + 2r^2x^2}$
3	$\{f(r), f'(r)\}$ <input type="radio"/> $\rightarrow \{r, -1\}$
4	$f''(x)$ $\rightarrow \frac{-4r^5 + 12r^3x^2}{r^6 + x^6 + 3r^2x^4 + 3r^4x^2}$
5	$\{f''(0), f''(r)\}$ <input type="radio"/> $\rightarrow \left\{ -\frac{4}{r}, \frac{1}{r} \right\}$
6	$\kappa(x) := f''(x) / (1 + f'(x)^2)^{3/2}$ $\rightarrow \kappa(x) := \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{(-4r^3, r^4 + x^4 + 2r^2x^2)^2 + 1}}}{(-4r^3, r^4 + x^4 + 2r^2x^2)^2 + 1}}}{r^6 + x^6 + 3r^2x^4 + 3r^4x^2}$
7	$\{1/\kappa(0), 1/\kappa(r)\}$ <input type="radio"/> $\rightarrow \left\{ -\frac{1}{4}r, \sqrt{2} \cdot 2r \right\}$
8	$\text{Integral}[2f(x), 0, \text{en}]$ $\rightarrow 4r^2 \arctan\left(\frac{\text{en}}{r}\right)$
9	$\text{Grenzwert}[\{(4 * r^3(2)) * \arctan(\text{en} / r)\}, \text{en}, +\infty]$ <input type="radio"/> $\rightarrow ?$
10	$4r^2 \arctan(+\infty)$ $2r^2 \pi$

**Abb. 4.1 Aufgabe 4.1 Enge Versiera**

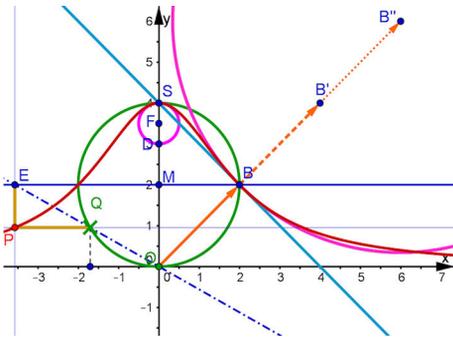
Berechnungen mit GeoGebra-CAS.

Dabei ist im CAS  $r$  geschrieben anstelle von  $a$ , denn in derselben GeoGebra-Datei ist  $a = 2$  eine belegter Parameter. Will man im CAS den Parameter noch erkennen muss man ihn umbenennen.

**Lösung:**

**Zu 1.:** Es ist  $f(x) := \dots$  in Zeile 1 definiert als Funktion. In Zeile 8 steht das Flächenintegral von 0 bis zu einem „Ende“ doppelt. Man nennt letzteres oft  $c$  oder  $b$ . In GeoGebra aber muss man aufpassen, dass man nicht Namen verwendet, die im Geometrie-Teil schon belegt sind. GeoGebra schafft es nicht, den Grenzwert für das Argument  $\text{en}/r$  zu berechnen. Nun lohnt es sich, mathematisch zu verstehen, dass die Division durch  $r$  eine waagerechte Streckung des Arkustangens bedeutet. Das hat keine Wirkung auf die Asymptote  $y = \frac{\pi}{2}$ . So kommt als Fläche  $2r^2\pi$  heraus und das ist die doppelte Fläche des grünen Erzeugungskreises. So ist es auf Seite 82 mitte schon angekündigt.

**Zu 2.:** Zeile 3 im CAS sichert, dass die Gerade  $SB$  tatsächlich Tangente im Punkt  $B = (r, r)$  ist. Übrigens geht wegen der waagerechten Streckung auf die weite Versiera deren Tangente in  $(2r, r)$  auch durch  $S$ .



**Abb. 4.2 Aufgabe 4.1 Enge Versiera**  
Konstruktionen, die unten erklärt sind.

**Zu 3. und 4.:** Die Krümmungsbestimmung führt mit Zeile 2 für  $f'$  und Zeile 4 für  $f''$  zu der „wilden“ Krümmungsformel in Zeile 6. Dort ist rechts die Klammer  $(-4r^5 + 12r^3x^2)$  nicht mehr im Bild. Man braucht aber nur bei  $x = 0$  und bei  $x = r$  die Krümmungsradien. In Zeile 7 ist  $\varrho(0) = \frac{r}{4}$  und  $\varrho(r) = 2\sqrt{2}r$  zu entnehmen.

Den Scheitelkrümmungskreis (violett, klein) erhält man durch achteln des Durchmessers des grünen Kreises.

Die Länge des orangefarbenen Vektors  $\overrightarrow{OB}$  ist  $\sqrt{2}r$ , man muss ihn also nur zweimal anhängen, um  $B''$  als Mittelpunkt des Krümmungskreises (violett, groß) zu erreichen.

**GeoGebra-Datei** afg4.1-versiera-eng.ggb

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 4.1.3 Versiera und ihre Rotation um die x-Achse

#### Aufgabe 4.2 Der gemeinsame Schwimmgürtel-Torus

Wenn ich mir wünsche, dass *Sie* Kurven kreativ erkunden, bleibt es nicht aus, dass *ich* dieses auch getan habe. Die dabei entdeckte Besonderheit formuliere ich als Aufgabe. Dabei beziehe ich mich auf Abb. 4.3 (hier). Das Bild rechts neben den Körpern ist ein

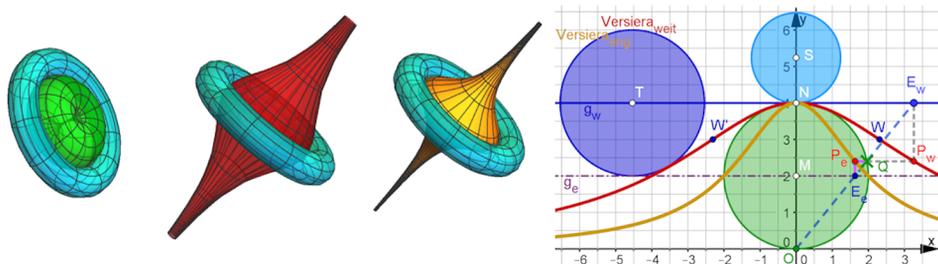


Abb. 4.3 Beide Versierae und ihre Tori, Wimmelbild zu Aufgabe 4.2

„Wimmelbild“ – Sie kennen diesen Ausdruck vielleicht für die reichhaltigen Bilder für kleine Kinder vor dem Lesealter. Es sind dort der gemeinsame Erzeugungskreis (grün) und die Konstruktionen beider Versierae zu sehen. Der Kreis für den Torus in Abb. 4.5 (Buch) ist dunkelblau. Neu ist der hellblaue Kreis, der zu den hellblauen Tori in Abb. 4.3 links gehört.

1. Welchen Radius muss der hellblaue Kreis haben, damit der zugehörige Torus das Volumen  $2\pi^2 a^3$  hat?
2. Deuten Sie dieses Volumen in Bezug auf die weite bzw. die enge Rotations-Versiera.
3. Beziehen Sie den grünen Torus, der aus dem Erzeugungskreis entsteht, in Ihre Vergleiche mit ein.
4. Weisen Sie nach, dass  $N$  die Strecke  $\overline{MS}$  im **goldenen Schnitt** teilt, dass also die Durchmesser des Schwimmringkreises und des Erzeugungskreises im **goldenen Verhältnis** stehen.

#### Hinweis

Für 1. muss gelten  $2\pi^2 a^3 = 2\pi^2 (2a + r)r^2$ . Diese Gleichung 3. Grades können Sie elementar nur dann lösen, wenn Sie bedenken, dass Sie eine Lösung, nämlich  $r = -a$ , schon kennen. Ein CAS führt auch direkt zum Ziel. Zur Sicherheit: die gesuchte Lösung ist  $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ . Dieses Ergebnis löst auch gleich Aufgabenteil 4. ◀

#### Lösung:

**Zu 1. und 4.:** Im Hinweis ist der Nach Formel 4.5 naheliegende Ansatz genannt, denn der Abstand des Mittelpunktes  $S$  von der x-Achse ist  $(2a + r)$ . Gekürzt und aufgelöst

ergibt sich  $r^3 + 2ar^2 - a^3 = 0$ . Der grüne Torus aus Abb. 4.4 im Buch ergibt sich für  $r = -a$ . Darum geht die Polynomdivision durch  $(r + a)$  ohne Rest auf und ergibt  $r^2 + ar - a^3 = 0$ . Die positive Lösung ist  $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx 0.6183a = \varphi a$ .  $N$  teilt die Strecke  $\overline{MS}$  im **goldenen Schnitt** heißt mit  $\overline{NM} = a$  nun die Behauptung  $\frac{a}{a+r} = \frac{a}{a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \dots = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  nach kleiner Rechnung.

**Zu 2. und 3.:** Der gelbe Rotationskörper der engen Versiera mit hellblauem Schwimmring ist so groß wie der rote Rotationskörper der weiten Versiera. Dieser ist so groß wie die beiden aneinander geschmiegteten, volumengleichen Tori in Abb. 4.3 (hier) ganz links. Wenn Ihnen das „komisch“ vorkommt, bedenken Sie, dass „außen“ kreisende Flächenelemente mehr Volumen erzeugen als dicht an der Achse befindliche gleichgroße Elemente.

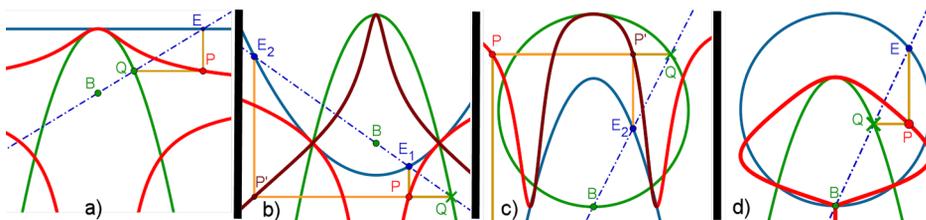
# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 4.1.4 Allgemeine Versiera

### Aufgabe 4.3 Erkundungen mit der allgemeinen Versiera

Versuchen Sie zunächst „auf eigene Faust“ für eine der Kurven in der Abb. 4.4 eine Gleichung direkt herzuleiten und Eigenschaften zu begründen. Dabei erschließt sich Ihnen der Beweis des vorigen Satzes. Am besten ist, Sie stellen **sich selbst** Fragen und Variationsaufgaben. Anregungen:



**Abb. 4.4 Aufgabe 4.3 Allgemeine Versiera** a) Parabel–Gerade, b) Parabel–Parabel, c) Kreis–Parabel, d) Tausch von  $C_1$  und  $C_2$  bei c), also Parabel–Kreis.

1. Leiten Sie unter Verwendung von Satz 4.1 für 4.4 a) bis c) Gleichungen her. Stellen Sie dazu entweder die Gleichungen der Parabeln konkret auf oder lassen Sie Lageparameter in Ihrer Rechnung.
2. Bauen sie die Konstruktionen in GeoGebra nach und prüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Eintragen der impliziten Gleichungen.
3. Versuchen Sie einige Eigenschaften der Ergebniskurven mit Hilfe der Gleichungen oder der Konstruktion zu begründen.
4. Der Fall d), bei dem  $C_1$  die Parabel ist und  $C_2$  der Kreis, ist ebenso leicht nachzubauen aber deutlich schwieriger zu rechnen.
5. Experimentieren Sie mit Parabeln in anderer Lage.
6. Experimentieren Sie mit zwei Kreisen, die Sie in Lage und Größe frei variieren können. Die Ortslinien der beiden sich ergebenden Schnittpunkte sind meist verschieden geformte geschlossene Kurven. In welchen Fällen sind diese Kurven kongruent?

### Hinweis

Als Muster für die Vorgehensweise diene das Folgende: Für die Kreis-Parabel-Versiera in Abb. 4.4c) könnte der Kreismittelpunkt  $M = (0, a)$  sein, als Parabel kommt  $y = k(x) = mx^2 - n$  infrage. Dann ergibt sich aus der vorletzten Zeile des obigen Satzes:  $x^2y = (mx^2 - n)^2(2a - y)$ . Man sieht so allerlei: An den Nullstellen der Parabel berührt diese Kurve die x-Achse. Ist  $y > 2a$  ist die Gleichung nicht erfüllbar. Die Gerade  $y = 2a$  ist Asymptote, denn wenn Q an den „Nordpol“ des Kreises wandert, geht P nach außen und von unten immer dichter an diese Gerade heran. Da  $x$  nur quadratisch vorkommt, ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse. ◀

**Lösung: Zu 1., 2. und 3.**  $B$  sei als Koordinatenursprung gewählt.

**Zu a):** Gleichung: Mit  $y = f(x) = b - x^2$  und  $y = k(x) = b$  folgt nach Satz 4.1  $y = b - \frac{xy}{b}$  und bald  $y(b^2 + x^2y) = b^3$ .

Wegen des  $x^2$ -Terms ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse, mit der sie genau den Punkt  $(0, b)$  gemeinsam hat. Die x-Achse hat keinen gemeinsamen Punkt mit der Kurve, denn  $0(b^2 + x^2 \cdot 0) = b^3$  ist für kein  $x$  erfüllbar. Geometrisch rücken  $E$  und  $P$  beliebig nach außen, wenn  $Q$  an die x-Achse rückt. Darum ist die x-Achse wirklich Asymptote. Rückt  $Q$  dagegen an den Scheitel der Parabel, wird der zweite Schnittpunkt mit der Parabel beliebig nach unten wandern,  $P$  und  $E$  also an die y-Achse rücken. Daher ist die negative y-Achse auch wirklich Asymptote.

Wer das als Grenzwert gerechnet sehen will, kann die Gleichung durch  $y^2$  dividieren und  $x^2 = \frac{b^3}{y^2} - \frac{b^2}{y}$  betrachten. Für  $y \rightarrow 0$  muss auch  $x$  gegen 0 gehen.

**Zu b):** Gleichung: Nun sei  $f(x)$  wie oben, aber  $y = k(x) = ax^2 - c$ . Es folgt auf gleiche Weise  $(b - y)(ax^2 + c)^2 = x^2y^2$ .

Wegen des  $x^2$ -Terms ist die Kurve symmetrisch zur y-Achse, mit der sie genau den Punkt  $(0, b)$  gemeinsam hat. Die x-Achse hat genau für negative  $c$  zwei gemeinsame Punkte mit der Kurve, nämlich  $(\pm\sqrt{-\frac{c}{a}})$ .

Die Gerade  $y = b$  hat mit der Kurve den Parabelscheitel von  $C_1$  gemeinsam, denn  $0 = x^2b^2$  ist nur für  $x = 0$  erfüllbar. Wenn  $Q$  an diesen Scheitel rückt, geht  $P'$  auch dahin, aber  $P$  wandert nach außen und beliebig dicht an  $y = b$  heran. also ist diese Scheitelgerade eine Asymptote. Wieder ist die negative y-Achse Asymptote, Wie man beim Wandern von  $Q$  nach unten merkt.  $P'$  allerdings wandert dabei auf einer gekrümmten Bahn nach außen.

**Zu c):** Die Berechnung steht schon im Hinweis zur Aufgabe. Da  $Q$  den Kreis nicht verlässt und  $P$  die Ordinate erbt, befindet sich die Kurve in einem waagerechten Streifen von der Breite des Durchmessers. Eine senkrechte Asymptote gibt es also nicht, andere Überlegungen sind ähnlich wie eben.

**Zu d): Das Rechnen ist unerquicklich. Aber bauen, hinsehen und Nachdenken lohnt.**

**Zu 5. und 6.:** Nur selber machen erzeugt Kompetenz!!!!!! Bei den zwei Kreisen können die beiden geschlossenen Kurvenäste nicht aus dem Rechteck hinaus, das die Höhe des Durchmessers des ersten Kreises und die Breite des Durchmessers des zweiten Kreises hat. Kongruenz tritt (mindestens) auf, wenn der Pol  $B$  und der Mittelpunkt des zweiten Kreises zusammenfallen.

**GeoGebra-Datei** dazu: all-versiera-kreis-kreis.ggb

Die anderen GeoGebra-Dateien sind im Menü passend verlinkt.

## 4.2 Neil'sche Parabel und andere Kubiken

### 4.2.1 Klassifikation der Kubiken

### 4.2.2 Graphen der Kubiken vom Typ II., IV., III. und I

## 4.3 Cassini'sche Kurven und andere bipolare Kurven

### 4.3.1 Cassini'sche Kurven konkret

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 4.3.2 Bipolare Kurven mit beliebigen Gleichungen für $r$ und $r'$

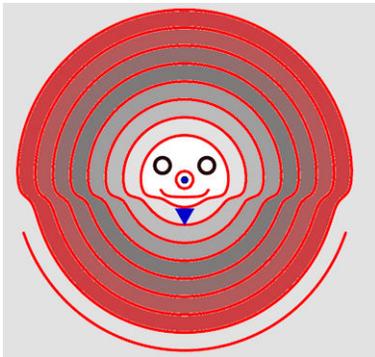
#### Aufgabe 4.4 Weitere bipolare Kurven

Am besten denken Sie sich selbst Gleichungen aus oder variieren das Bisherige. Einige Anregungen:

1. Sehen Sie sich wirklich die Bewegungen von  $P$  und  $P'$  bei Variation von  $Q$  in den Dateien zu den gezeigten bipolaren Kurven in gekoppelter Darstellung an.
2. Untersuchen Sie die **Descartes'schen Ovale** aus der Definition 4.3 S. 100 in der gekoppelten Darstellung. Welche Typen gibt es?
3. Was wird aus  $r' = 0.2 \tan(r) + r$ ? Der **Tangens** schneidet den fraglichen Bereich ja unendlich oft. Der Summand  $r$  bewirkt, dass die typische S-Welle des Tangens im Gültigkeitsbereich bleibt.
4. Was wird aus  $r' = 5.5 \sin(r) + r$ ?
5. Experimentieren Sie mit **Parabeln**.

#### Hinweis

Sie brauchen nur in den GeoGebra-Dateien den Eintrag für die Kurvengleichung zu ändern. Geben Sie Funktionen mit  $y = term(x)$  ein oder nehmen Sie für Funktionen eine andere Datei als für Gleichungen. Achten Sie darauf, dass Ihre Kurve im erlaubten Bereich auch wirklich Punkte hat. ◀

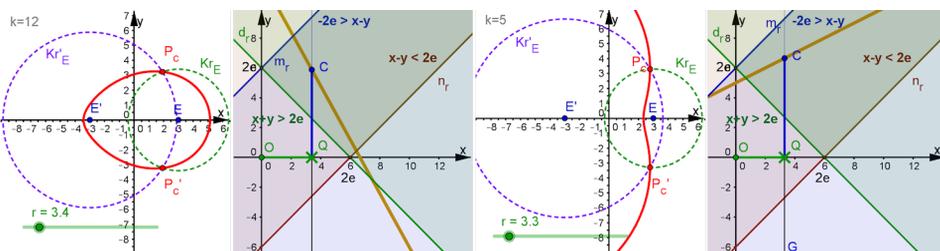


**Abb. 4.5** Aufgabe 4.4 Top 3. Schräger Tangens

**Lösung: Zu 1.:** Wenn Ihnen die Datei zu Bild 4.19 (Buch) zu aufwändig ist, dann nehmen Sie die zu den Descartes'schen Ovalen in Top 2. Aber: **Beobachten können Sie nur selbst!**

**Zu 2.:** Descartes'sche Ovale, auch etwas missverständlich „kartesische Ovale“ genannt, erfüllen eine Gleichung der Bauart  $mr \pm nr' = k$ . Dabei gibt es zwei Brennpunkte

$E = (e, 0)$  und  $E' = (-e, 0)$  im Abstand  $2e$ . Diese Festlegungen der Brennpunkte sind „o. B. d. A.“, sie schränken die Allgemeinheit nicht ein, machen Sie sich das klar. Es erfüllen also  $r$  und  $r'$  für jedes Descartes'sche Oval eine lineare Gleichung. Damit ist schon klar, dass Ellipsen und Hyperbeln für  $m = 1$ ,  $n = 1$  und  $k = \pm 2a$  spezielle solche Ovale sind.



**Abb. 4.6 Aufgabe 4.4 Descartes'sche Ovale gekoppelt** Diese Darstellung ist im Buch auf Seite 105 in Abb. 4.19 und 4.20 erklärt. Sonstiges steht im Text.

Die lineare Gleichung erzeugt die ockerfarbene Gerade, die nur für Punkte in dem dunkelgrünen Bereich Kurvenpunkte erzeugt. Damit ergeben sich aus diesen Bildern zwei Typen: geschlossene eiförmige Kurven und geschlossene Kurven mit Delle. Letzteres sieht man hier nicht, aber die Gerade verlässt sicher weiter rechts den Gültigkeitsbereich, daher kann sie nicht bis ins Unendliche reichen.

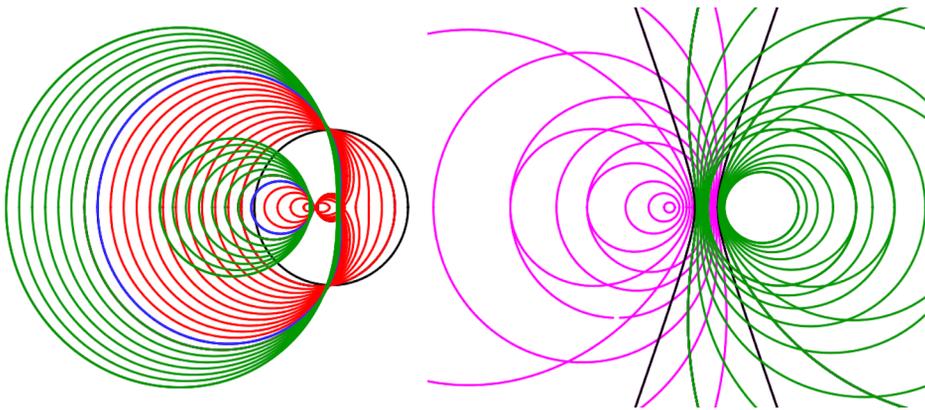
Betrachten wir aber den Fall, dass die Gerade die Steigung 1 hat, so ergibt sich eine **Hyperbel**, wenn  $|k| < 2e$  ist. Bei Ellipsen ist dagegen die Steigung  $-1$  und  $k > 2e$ .

Wenn man die Gleichung der Kurve aufstellen will, braucht man die beiden Kreise  $Kr_E: (x - e)^2 + y^2 = r^2$  und  $Kr'_E: (x + e)^2 + y^2 = a^2$ , der Deutlichkeit halber ist  $a := r'$  geschrieben. Dazu tritt die Bedingung *DES*:  $mr + na = k$ . Wir denken später über die Minus-Fälle nach. Elimination von  $a$  und  $r$  ergibt mit Mathematica, wenn man etwas elegant sortiert,

$$k^4 + (-2e(m^2 + n^2)x + (m^2 - n^2)(e^2 + x^2 + y^2))^2 - 2k^2(-2e(m^2 - n^2)x + (m^2 + n^2)(e^2 + x^2 + y^2)) = 0$$

Mit Copy as plaintext kann man das in GeoGebra übernehmen, wobei man vorher!!!!  $e, k, m, n$  als Schieberegler definieren muss. Damit kann man weiter erkunden, wie die Abbildung zeigt.

Ein Minuszeichen bei  $n$  oder bei  $k$  müsste die Wirkung von negativen  $n$  bzw.  $k$  haben. Da beide aber nur in gerade Potenz in der Gleichung vorkommen, ist es nicht nötig, noch einen „Minus-Ansatz“ zu rechnen.

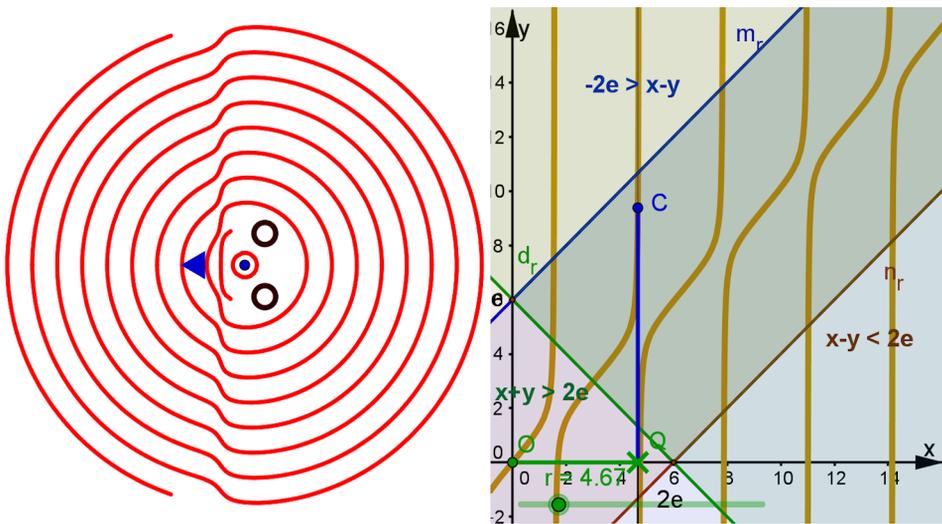


**Abb. 4.7 Aufgabe 4.4** Descartes'sche Ovale

Linkes Bild:  $k = 2, m = 0.7, n = 1$  und  $e$  variiert von 0 (schwarz), dann rot, über  $e = 2.4$  (blau), dann grün bis  $e = 3.8$ .

Rechtes Bild:  $e = 3, k = 2, n = 1$  und  $m$  variiert von 0.1 bis 1 violett und dann bis 1.8 in rot.

**Zu 3.: Abb. 4.8 (hier)** Schräger Tangens



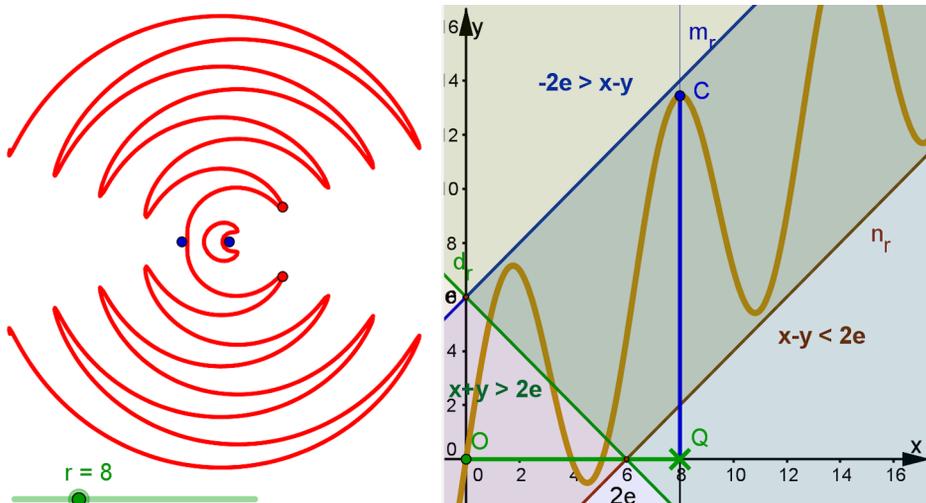
**Abb. 4.8 Aufgabe 4.4 Top 3.** Schräger Tangens

Rechts sieht man, dass die Äste der Tangenskurve stets den Gültigkeitsstreifen verlassen. Daher besteht die Kurve nur aus „Inseln“. Der Strich, der wie ein Mund aussieht, ist ein Artefakt. Bei feiner Einstellung für  $r$  gehört er auch zu einer geschlossenen Kurve. Es gab auch keinen geometrischen Grund für die Enden des Striches.

**Machen Sie sich klar:** Erreicht  $C$  die blaue Gerade  $m_r$  (oben)  $-2e = x - y$  so entsteht ein Punkt auf der  $x$ -Achse rechts vom rechten Brennpunkt  $E$ . Die untere Gerade  $n_r$  gehört zu Punkten  $(x_0, 0)$  mit  $x_0 < -2e$ , die grüne Gerade  $d_r$  gehört zu Punkten auf der  $x$ -Achse zwischen den Brennpunkten. Vergleichen Sie dies nochmals mit den Geraden

parallel zu den Bereichskanten, die zu Ellipsen und Hyperbeln und Hyperbeln führen (siehe Text zu Top 2.).

**Zu 4.:Abb. 4.9 (hier)** Schräger Sinus



**Abb. 4.9 Aufgabe 4.4 Top 4. Schräger Sinus**

Rechts sieht man, dass die Sinuskurve außen stets im Gültigkeitsstreifen bleibt, anfangs tritt sie noch einmal heraus. Daher hat die Kurve links innen eine kleine „Insel“, sonst ergibt sich eine zusammenhängende Kurve. Für kleine  $k$  verschwindet die Insel, für große  $k$  gibt es nur noch Inseln. Finden Sie selbst heraus, wann das eine bzw. das andere passiert.

**Zu 5.:** Wenn Sie die Parabeln als  $f(x) = k(x - m)^2 + n$  realisieren, können Sie auch hierfür die Hauptdatei dieser Aufgabe verwenden. Je nachdem wie oft Ihre Parabel den Gültigkeitsbereich schneidet bekommen Sie zwei ineinander liegende Inseln, Vanillekipferl, einzelne Übergangsformen, isoliert Punkte oder gar keine Kurve.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 4.4 Lemniskaten und andere Gelenkkonstruktionen

#### 4.4.1 Bernoulli'sche Lemniskate

##### Aufgabe 4.5 Lemniskaten-Eigenschaften

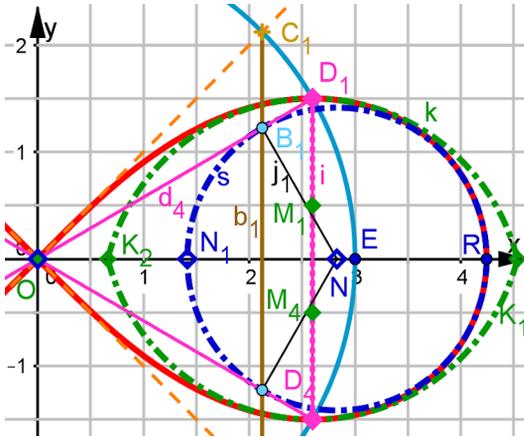
Diese Aufgabe bezieht sich auf das Wimmelbild Abb. 4.25 (Buch), die hier als bezeichnete Abb. 4.10 am Beginn der Lösung steht. Beachten Sie auch die vorigen Bilder zur Lemniskate im Buch.

1. Die Ursprungstangenten der Lemniskate schneiden den Kreis durch die Brennpunkte. Welche Koordinaten haben die Schnittpunkte?
2. Im Wimmelbild sind diese Punkte verbunden. Welcher Bezug besteht zu Abb. 4.22 a)
3. Im Wimmelbild schneidet diese Verbindungsstrecke den Krümmungskreis. In Abb. 4.10 (hier unten) ist alles größer zu sehen. Ist dieser Schnittpunkt  $B_1$  wirklich Berührungspunkt für die Seite des gleichseitigen Dreiecks aus dem Ursprung und den Extrema?
4. Was bedeutet der Pfeil in Abb. 4.24 b)?
5. Kann man diese Zusammenhänge zur Konstruktion des Krümmungskreises verwenden?
6. Die Krümmungskreise der Extrema schneiden im Wimmelbild die x-Achse. Haben diese Schnittpunkte eine besondere Lage?
7. Rechts von den Extrema in der rechten Schlaufe stimmt der Krümmungskreis ziemlich gut mit der Lemniskate überein. Wie groß ist der Ordinatenunterschied von Extrempunkt und Kreispunkt?
8. Wie groß ist der Flächenunterschied rechts von der Gerade durch die Extrema?
9. Auch die Lemniskate lässt sich nach [Lockwood 1961, S. 116] als Cissoide auffassen. Die Kurve  $C_1$  ist der Kreis um E mit dem Radius  $\frac{e}{\sqrt{2}}$  und  $C_2$  ist derselbe Kreis. D. h. der Fahrstrahl schneidet den Kreis in Q und D. (E ist hier als Name vergeben.) Bauen Sie in GeoGebra eine entsprechende Konstruktion für die Lemniskate.

##### Hinweis

Verwenden Sie die in den vorigen Absätzen hergeleiteten Ergebnisse und setzen Sie auch GeoGebra und CAS ein. Die Grunddateien sowie Ergebnisse finden Sie wie immer auf der Website zum Buch. ◀

**Lösung:** Von Seite 108 bis 112 sind im Buch schon viele Eigenschaften hergeleitet. Der didaktische Sinn eines solchen Wimmelbildes ist aber, sich in eigener Regie den dargestellten Eigenschaften zu widmen. Es ist auch gut denkbar, dass man gar keine Fragen explizit stellt.



**Abb. 4.10** Lemniskate: Wimmelbild zu den Eigenschaften und ihren Bezügen, siehe Aufgabe 4.5

**Zu 1. und 2.:** Der Polarwinkel im Ursprung ist  $45^\circ$ , aus der Polargleichung 4.23 und Gleichung 4.25. Der Kreis um  $O$  durch  $E$  ist  $x^2 + y^2 = e^2$ . Das hat mit  $y = x$  für die Tangente  $x_c = y_c = \frac{1}{2}\sqrt{2}e$  für Schnittpunkt  $C_1$  zur Folge. Diese Längen sind als halbe Diagonalen eines Quadrates mit der Kantenlänge  $e$  zu interpretieren. Dies ist in Abb. 4.22 a) S. 109 im Buch zu sehen.

**Zu 3.:** Für den blauen Krümmungskreis  $s$  im rechten Scheitel sind in Abschnitt 4.4.1.4 drei Bestimmungsarten vorgestellt. Jedenfalls ist sein Mittelpunkt  $N = (\frac{2}{3}\sqrt{2}e, 0)$  und der Krümmungsradius  $\varrho_s$  ist die Hälfte dieser Abszisse. Der Ansatz für den gesuchten Schnittpunkt ist daher  $(x - \frac{2}{3}\sqrt{2}e)^2 + y^2 = \frac{2}{9}e^2$  und  $x = x_c = \frac{1}{2}\sqrt{2}e$ . Sofort folgt  $y = \frac{e}{\sqrt{6}}$  als Ordinate von  $B_1$ . Damit hat die Gerade  $OB_1$  die Steigung  $\frac{\frac{e}{\sqrt{6}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}e} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$ . Damit liegt  $B_1$  auf der violetten Geraden  $OD_1$ . Diese Lage des Extremums  $D_1$  ist in Abschnitt 4.4.1.1 abgesichert und in Abb. 4.22 b) im Buch dargestellt.

**Zu 4. und 5.:** Der Pfeil in Abb. 4.24 b) im Buch zeigt, dass man  $B_1$  nun auch als Schnittpunkt von  $C_1C_4$  und  $OD_1$  auffassen kann und von dort mit der Senkrechten auf  $OD_1$  nun  $N$  konstruieren kann. Es passt alles schön zusammen.  $N$  ist ja auch die äußere Drittelstelle der Halbachse.

**Zu 6.:** Die Krümmungskreise in den Extrema wurden im Buch in Abschnitt 4.4.1.3 berechnet. Der Krümmungsradius ist  $\varrho = \frac{2}{3}e$ . Da  $e$  auch der Abstand der Extrema ist, wie es Abb. 4.22 b) mit den gleichseitigen Dreiecken zeigt, braucht man diesen nur zu dritteln, um die Mittelpunkte der Extremum-Krümmungskreise zu erhalten. Die Gleichung des

oberen ist  $(x - \frac{\sqrt{3}}{2}e)^2 + (y + \frac{e}{6})^2 = \frac{4}{9}e^2$ , er schneidet die x-Achse in  $x = \frac{\sqrt{3}e}{2} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}e$ . Dazu fällt mir nichts Besonderes ein.

**Zu 7. und 8:** Der blaue Scheitelkrümmungskreis hat an der Stelle  $\frac{\sqrt{3}}{2}e$  die Lösung von  $(\frac{\sqrt{3}}{2}e - \frac{2}{3}\sqrt{2}e)^2 + y^2 = \frac{2}{9}e^2$  als Ordinate. Das ist kein übersichtlicher Term. Es ist sowieso sinnvoll, hier  $e = 3$ , wie im Bild, festzulegen und numerisch zu arbeiten. An der Polargleichung sieht man deutlich, dass es bis auf Streckungen nur eine einzige Bernoulli'sche Lemniskate gibt. Darum sind nur Längenverhältnisse und Flächenverhältnisse interessant. Im Folgenden kommt GeoGebra mit CAS und numerischer Analysis zum Einsatz.

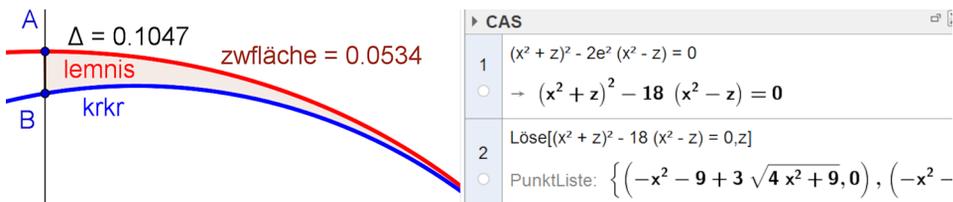


Abb. 4.11 Aufgabe 4.5 Top 6. und 7.:Lemniskate und Scheitelkrümmungskreis

Das ist Abb. 4.11 gezeigt. Die Lemniskatengleichung ist biquadratisch in  $y$ , man kann auch von Hand auflösen und erhält  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 9 + 3\sqrt{4x^2 + 9}}$ . Für den Kreis nimmt man in diesem Bereich  $g(x) = \sqrt{2 - (x - 2\sqrt{2})^2}$ . Mit **Extremum[f]** bekommt man Punkt A, dann B mit der senkrechten Geraden und dem Schnittwerkzeug. Der in Top 6. gefragte Unterschied ist  $\Delta = 0.1047$ , also 7 Prozent der Verkürzung der Lemniskaten-Ordinate. Die Zwischenfläche ist mit **Integral[f, g, x(A), x(R)]** zu haben und ergibt sich zu 0.0534, also 1.2 Prozent der Viertelfläche der Lemniskate. Für eine Zeichnung der Lemniskate von Hand ist dieser Scheitelkrümmungskreis zusammen mit dem Tangentenkreuz im Ursprung also sehr nützlich.

**Zu 9.:** Die Cissoiden-Konstruktion der Lemniskate von Lockwood ist verblüffend einfach und für junge Lernende gut geeignet.

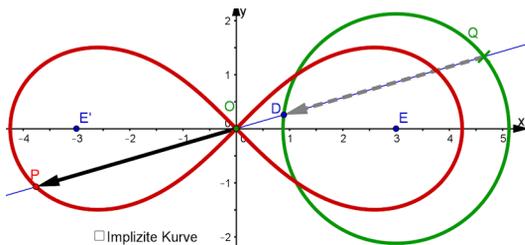


Abb. 4.12 Aufgabe 4.5 Top 6. und 7.:Lemniskate und Scheitelkrümmungsreis

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

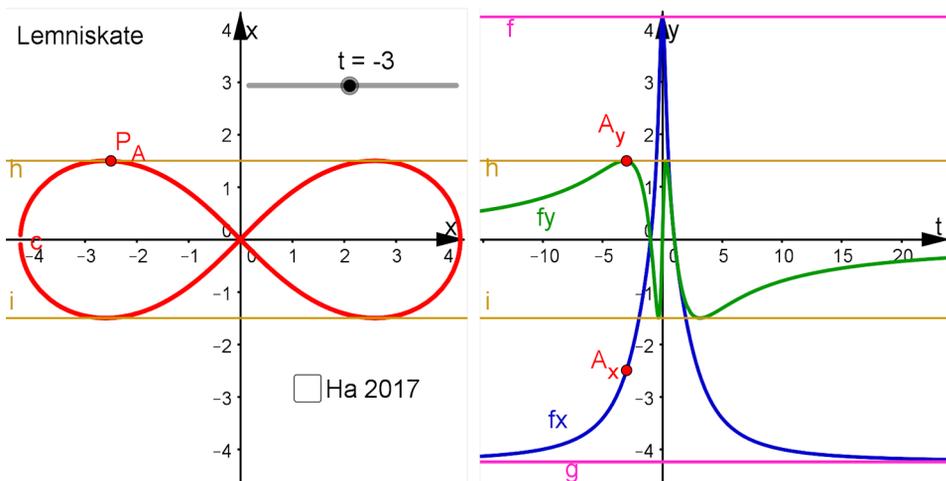
### 4.4.1.5 Andere Darstellungen der Lemniskate

#### Aufgabe 4.6 Parameterdarstellungen der Lemniskate

Es kann sehr verschiedene Parameterdarstellungen derselben Kurve geben. Zumeist sind sie in der Form  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  gegeben. Verwenden Sie im Folgenden die Standardrealisierung in GeoGebra aus dem Werkzeugkasten Abschnitt 2.4.

1. Bauen Sie eine GeoGebra-Datei zu der zweiten Parameterdarstellung aus Gleichung 4.29. Beachten Sie, dass hier die Lemniskate „in eins“ durchlaufen wird. Die Stückelung, die bei Gleichung 2.28 nötig wird, entfällt.
2. Ist auch  $x = x(t) = a \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)^2}$ ,  $y = y(t) = a \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)^2} \sin(t)$  eine Parameterdarstellung der Bernoulli'schen Lemniskate?
3. Ist auch  $x = x(t) = \sqrt{2}e \sin(t)$ ,  $y = y(t) = \frac{e}{2} \sin(2t)$  eine Parameterdarstellung der Bernoulli'schen Lemniskate?

**Lösung:** Wie hinter dem blauen Kasten mit Gleichung 4.29 und auch in Abb. 4.27 (Buch) erklärt ist Definieren wir für das zweite Grafikfenster die Funktionen  $fx(x) = \frac{a(1-x^4)}{1+6x^2+x^4}$  und  $fy(x) = \frac{2ax(1-x^2)}{1+6x^2+x^4}$ . Die Rechtsachse ist mit dem Parameter  $t$  beschriftet, der im Buch  $s$  heißt.



**Abb. 4.13** Aufgabe 4.6 Lemniskate in rationaler Parametrisierung, Darstellung mit zwei gekoppelten Grafikfenstern

Es ist zu beobachten, dass der linke Scheitelpunkt  $(-a, 0)$  mit endlichen  $t$  gar nicht erreicht wird. Sieht man sich den Durchlauf von  $P$  durch die Kurve an, ohne das 2. Grafikfenster zu kennen, hat man große Mühe,  $P$  überhaupt in die rechte Hälfte der Lemniskate zu bekommen.  $t = 0$  gehört zum rechten Scheitel  $(a, 0)$ ,  $t = 1$  bildet schon den Doppelpunkt, dann wandert mit wachsendem  $|t|$  Punkt  $P$  immer langsamer weiter nach links,

im Bild bis  $\pm 100$ . Mit Blick auf das rechte Grafikfenster aber kann man dieses Verhalten gut verstehen.

Wer möchte, kann seine Vertrautheit mit gebrochen rationalen Funktionen testen. Für  $fx$  ist die Asymptote  $y = -a$  augenfällig, senkrechte Asymptoten (Pole) kommen wegen des echt positiven Nenners nicht vor, als gerade Funktion muss es für  $t = 0$  ein Maximum geben. Dagegen strebt  $fy$  außen gegen die x-Achse, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat vier Extrema, die den vier Extrema der Lemniskate entsprechen. Wir wissen schon, dass deren Ordinaten  $\pm \frac{e}{2}$  sind. Sehen Sie sich an, wann  $A_x$  und  $A_y$  in demselben Quadranten liegen und wann in verschiedenen.

**Zu 2.:** Realisierung in GeoGebra zeigt, dass die als implizite Gleichung eingegebene Lemniskate auf dieser Parameterkurve liegt. Strenge Gewissheit erlangt man in dem man  $t$  eliminiert. Das geht von Hand, wenn man die Schreiberei durch  $c = \cos(t)$ ,  $s = \sin(t)$  vereinfacht und an einer Stelle  $1 - s^2 = c^2$  beachtet. Man bildet  $(x^2 + y^2)^2$  und  $a^2(x^2 - y^2)$  und erhält dasselbe.

**Zu 3.:** Versucht man auch erst einmal in GeoGebra zu zeichnen, so ist sofort die sichere Antwort da: Die Kurven liegen nicht genau aufeinander, es sind verschiedene Kurven, obwohl auch eine Lemniskate mit denselben Gesamtabmessungen vorliegt. Wenn man stattdessen rechnen will, so bietet sich die Steigung im Ursprung an:  $m(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e \cos(2t)}{\sqrt{2}e \cos(t)}$  und damit  $m(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und das ist nicht Steigung 1, wie bei der Bernoulli'schen Lemniskate. Ist es die Geronon'sche Lemniskate aus Abschnitt 4.4.2.1?

**GeoGebra-Dateien** finden Sie auf der Website im Bereich 04 Barock-> Lemniskate

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 4.4.2 Noch mehr Lemniskaten

#### Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale und Booth'sche Lemniskaten

Lesen Sie die Einleitung und die Gleichungen im Buch auf Seite 116.

1. Sehen Sie sich die Booth'schen Ovale und Lemniskaten in GeoGebra an. Für welche Verhältnisse von  $c$  und  $s$  ergeben sich welche Formen?
2. Wann und bei welchem Typ kommen Doppelkreise zustande?
3. Zeigen Sie, dass für  $c^2 > 2s^2$  das Oval eine Delle hat und für  $c^2 \leq 2s^2$  nicht. Legen Sie dazu eine waagerechte Gerade durch den Scheitel.
4. Welche der Booth'schen Lemniskaten ist eine Bernoulli'sche Lemniskate?
5. Bestimmen Sie die Halbachsen der Booth'schen Ovale.
6. Bestimmen Sie  $k$  und  $e$  für Cassini'sche Kurven (Gleichung ?? und Abschnitt ??) so, dass die Halbachsen mit den eben berechneten übereinstimmen. Sehen Sie sich in GeoGebra die Cassini'schen Kurven und die Booth'schen Ovale mit den so berechneten gleichen Halbachsen an.
7. Setzen Sie einen zugfesten Punkt auf das Booth'sche Oval, und testen Sie, ob die für die Cassini'schen Kurven geltende Produktgleichheit für die Abstände von den Brennpunkten erfüllt ist.  $E = (e, 0)$  haben Sie aus der vorigen Nummer, beachten Sie auch den Hinweis.

#### Hinweis

Für gleiche Abmessungen gilt:  $k^2 = \frac{1}{2}(c^2 + s^2)$  und  $e^2 = \frac{1}{2}(c^2 - s^2)$ . ◀

#### Lösung:

**Zu beiden Booth'schen Typen:** Wegen der ausschließlich geraden Potenzen sind alle Kurven **zu beiden Achsen symmetrisch**. Zudem reicht es, nichtnegative Parameter  $c$  und  $s$  zu betrachten. Wenn im Folgenden der Begriff „**Scheitel**“ verwendet wird, so seien die Scheitel auf den Achsen gemeint. Die Extrema sind auch Scheitel in dem Sinne, dass sie lokale Krümmungsminima sind. Wie nennen Sie hier zutreffend „Extrema“. Beachten Sie, dass eine schräg im Koordinaten System liegende Parabel weiter ihren Scheitel hat, der dann aber kein Extremum ist, sondern nur Krümmungsminimum. Schräge Lagen der Booth'schen Kurven betrachten wir aber nicht.

Aus den kartesischen Gleichungen 4.31 ergibt sich mit den Grundgleichungen 2.6 sofort  $(r^2)^2 = c^2 r^2 \cos^2 \theta \pm s^2 r^2 \sin^2 \theta$ . Durch  $r^2$  darf man nur für  $r \neq 0$  dividieren. Bei den Ovalen „verliert“ man, wenn man es dennoch tut, die Lösung  $r = 0$ . Die kartesischen Booth'schen Kurvengleichungen 4.31 – von denen wir hier ja ausgehen wollen – werden alle vom Ursprung zu einer wahren Aussage gemacht. Für die Ovale ist er i.A. ein **isolierter Punkt**. Ausnahmen sind die Doppelkreisfälle, siehe Top 2.

Für die Lemniskaten folgt aus  $r = 0$  nun  $\frac{c}{s} = \pm \tan(\theta)$  und man kann den Tangens des Tangentenwinkels im Ursprung ablesen. Machen Sie sich klar, dass dieser zu den Situationen in Abb. 4.14 und Abb. 4.15 passt.

**Zu 5., Schnittstellen mit den Achsen:** An den Schnittstellen mit der x-Achse ist  $y = 0$ , also  $x^4 = c^2x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm c$  für Ovale und Lemniskaten. An den Schnittstellen mit der y-Achse ist  $x = 0$ , also  $y^4 = s^2y^2 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = \pm s$  für Ovale, aber Lemniskaten schneiden die y-Achse ausschließlich bei  $y = 0$ .

**Zu 1. und 4., Formen:** Die **Lemniskaten** sehen alle aus, wie man sich Lemniskaten vorstellt. Abb. 4.14 und Abb. 4.15 zeigen die Entwicklung in Rot aus dem Ursprung heraus bei festem  $s = 2$  für wachsende  $c$ . Von flachen Achten werden sie immer bauchiger,  $s = c$  ergibt die Bernoulli'sche Lemniskate mit  $c^2 = 2e^2$ , wie man an Gleichung 4.22 sieht, abgebildet als letztes Bild von 4.14. Wächst  $c$  weiter, wird die Lemniskate größer und ihre Ursprungstangenten werden immer steiler.

Die **Ovale** (violett) zeigen eine größere Vielfalt: einfache Ovale und eingebuchtete Formen, beides sowohl aufrecht als auch liegend. Probiert man mit den Schiebereglern  $c$  und  $s$  herum, stellt sich keine schnell durchschaubare Übersicht ein. Die Abb. 4.14 und Abb. 4.15 geben mit den gezeigten Streifen eine Hilfestellung zum Verstehen.

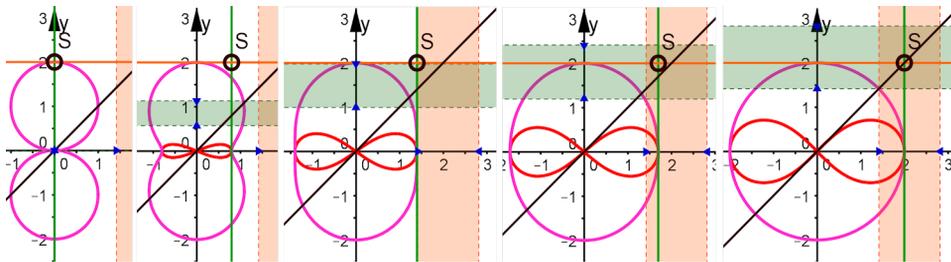


Abb. 4.14 Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale (violett und Lemniskaten (rot), Teil a)

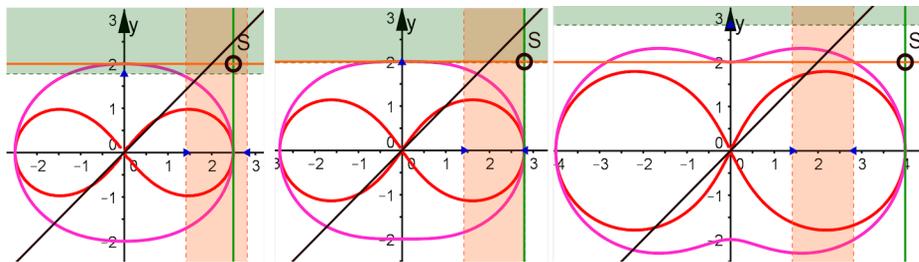


Abb. 4.15 Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale (violett und Lemniskaten (rot), Teil b)

**Zu 2. Ein Parameter sei 0:** Für  $c = 0, s \neq 0$  folgt  $x^2 + y^2 = \pm sy$  bei den Ovalen, das ist Doppelkreis wie eine Acht mit dem Zentrum im Ursprung und den beiden Durchmessern  $s$ . Bei dem Lemniskaten kommt nur der Ursprung selbst zustande.

Für  $s = 0, c \neq 0$  folgt  $x^2 + y^2 = \pm cx$  das ist bei beiden Typen Doppelkreis wie eine liegende Acht mit dem Zentrum im Ursprung und den beiden Durchmessern  $c$ .

**Zu 3., Grundidee für die Einbuchtungen** Um die Parameterkonstellation zu finden, bei der die Einbuchtungen anfangen, wird die Gerade  $y = s$  durch den oberen Scheitel

gelegt Wenn sie weitere Schnittpunkte mit dem Oval hat, ist dieses oben (und unten) eingebuchtet. Ansatz:  $(x^2 + s^2)^2 = c^2 x^2 + s^4 \Leftrightarrow x^2 (x^2 - (c^2 - 2s^2)) = 0$ . Diese Gleichung hat als doppelte Nullstelle  $x = 0$ , die Berührung mit der waagerechten Geraden. Für weitere Lösungen, also für eine Delle oben und unten, muss die Wurzel existieren, also muss  $c^2 > 2s^2$  gelten.

Ebenso erhält man mit der Senkrechten Gerade  $x = c$  die Existenz eine Delle rechts und links  $s^2 > 2c^2$ .

Der grüne Steifen markiert den Bereich  $\frac{c}{\sqrt{2}} < s < \sqrt{2}c$ . Wenn der obere Scheitel  $(0, s)$  in ihm liegt gibt es kein Delle im Booth'schen Oval.

Der orangefarbene Steifen markiert den Bereich  $\frac{s}{\sqrt{2}} < c < \sqrt{2}s$ . Wenn der rechte Scheitel  $(c, 0)$  in ihm liegt gibt es kein Delle im Booth'schen Oval.

In den Abb. 4.14 und Abb. 4.15 ist  $s = 2$  konstant und damit der Scheitel  $(0, s)$  ortsfest. Das gilt auch für den orangefarbenen Streifen. Der grüne Streifen wird mit wachsendem  $c$  breiter, wandert nach oben und der Scheitel  $(c, 0)$  wandert durch den senkrechten Streifen hindurch.

Die Lage des Punktes  $S = (c, s)$  fasst alles zusammen: Ist  $S$  im weißen Bereich, gibt es entweder oben/unten oder rechts/links Dellen. Anderenfalls ist  $S$  im Überschneidungsbereich der Streifen: Für  $S$  auf der Winkelhalbierenden  $y = x$  ist das Oval speziell ein Kreis und die Lemniskate vom Bernoulli-Typ. Ist  $S$  dort oberhalb der schwarzen Geraden, ist das Oval aufrecht und die Steigung  $m$  der Ursprungstangenten erfüllt  $|m| > 1$ . Ist  $S$  dort unterhalb der schwarzen Geraden, ist das Oval liegend und die Steigung  $m$  der Ursprungstangenten erfüllt  $|m| < 1$ .

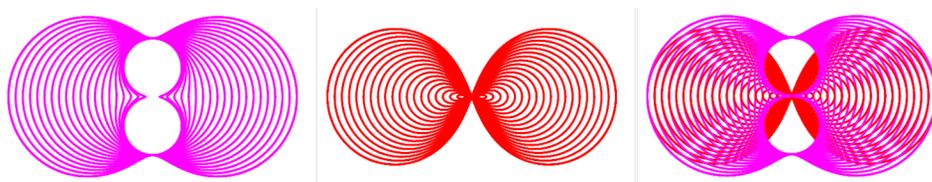


Abb. 4.16 Aufgabe 4.7 Booth'sche Ovale (violett) und Lemniskaten (rot) bei festem  $s$

**Zu 7. und 8. Vergleich mit den Cassini'schen Kurven** Da auch bei den Cassini'schen Kurven Ovale vorkommen, ist ein Vergleich interessant. Sinnvoll sind erst einmal gleiche Abmessungen. Die im Hinweis gegebenen Gleichungen sind die Lösungen des Gleichungssystems  $s^2 = k^2 - e^2$ ,  $c^2 = e^2 \pm k^2$ , das man aus Abschnitt 4.3.1.2 und den obigen Achsenschnittstellen sofort erhält. Mit diesen Werten für  $k$  und  $e$  kann man in **eine** Darstellung beide Kurven eintragen. Für beliebig gewählte  $s$  und  $c$  haben die Kurven gleiche Scheitel, aber verschiedenen Kurvenverlauf. Man kann mit Sicherheit sagen: I. A. sind Booth'sche Kurven und Cassinische Kurven verschieden. Dieses ergibt sich auch bei Prüfung des Abstandsproduktes eine Booth-Punktes von  $(\pm e, 0)$ .

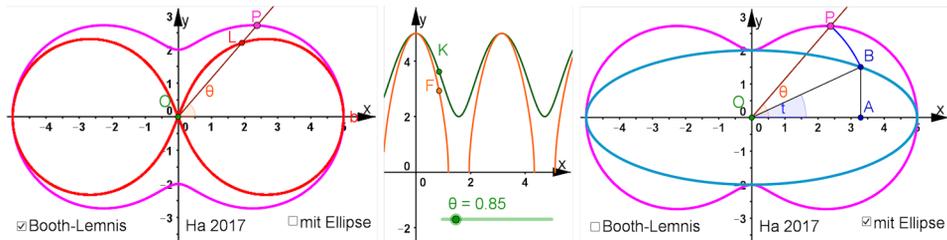
**Übereinstimmende Sonderfälle** sind noch überlegenswert:

Für  $s = c$  hat man  $k = c$  und  $e = 0$  und damit bei beiden Ovalen den Kreis  $x^2 + y^2 = c^2$ , für die Booth'schen Lemniskaten aber die Bernoulli'sche Lemniskate.

Für  $s = 0$  wird die Bernoulli'sche Lemniskate von Cassini von dem liegenden Doppelkreis der Booth'schen Kurve umschlossen.

Für  $c = 0$  gibt es nur die aufrechte Acht von Booth, wegen  $2e^2 = -s^2$  kommt keine Cassini'sche Kurve zustande.

**Zusatz Polardarstellung der Booth'schen Kurven** Hierzu steht schon etwas oben in der Einleitung zur Lösung. Ergänzen kann man, dass für die Ovale mit ihrem isolierten Punkt  $(0,0)$  weitere Lösungen für  $r = 0$  nicht zustande kommen, da dann  $\frac{c^2}{s^2} = -\tan(\theta)^2$  gelten müsste. Das Minuszeichen verschwindet nur bei den Lemniskaten.



**Abb. 4.17** Aufgabe 4.7 a) und b): Booth'sche Kurven polar-kartesisch c) mit eingebetteter Ellipse

**Die polar-kartesische Darstellung** zeigt deutlich, dass die Ovale mit ausschließlich positiven Polarradien problemlos durchlaufen werden, dass aber die Booth'schen Lemniskaten ebenso „Aussetzer“ haben wie es in Abschnitt 4.4.1.5 für die Bernoullische Lemniskate gezeigt ist. Auch hier beginnt der Durchlauf mit  $\theta = 0$  im rechten Scheitel, geht durch den I. Quadranten, dann „Pause“, dann in den II. Quadranten u.s.w. Von Hand würde niemand eine Lemniskate so zeichnen!

**Eingebettete Ellipse** Die Parameterdarstellung der Ellipse aus Gleichung 4.8 Seite 90 ist sehr „griffig“ und man könnte auf die Idee kommen  $x = c \cos(\varphi)$  und  $y = s \sin(\varphi)$  durch Quadrieren und Addieren auf  $x^2 + y^2 = r^2 = c^2 \cos(\varphi)^2 + s^2 \sin(\varphi)^2$  zu bringen. Nanu? Das ist doch Gleichung 4.2 Seite 116 für die Ovale, nur  $\varphi$  statt  $\theta$ !!! Abb. 4.17 c) zeigt deutlich, dass  $\theta$  nicht der Polarwinkel von  $B$  ist,  $\varphi$  ist es auch nicht (das steht auf Seite 90 im Buch), sondern das eingezeichnete  $t$ . Die Polarradien von  $B$  und  $P$  stimmen aber überein, dieses zeigt das Kreisbogenstück von  $B$  nach  $P$ .

**Zusatz-Aufgabe,** also eine Aufgaben-Babuschka: Entwickeln Sie aus diesem Zusammenhang mit der Scheitelkreiskonstruktion Abb. 4.9 auf Seite 90 im Buch eine **geometrische Konstruktion der Booth'schen Ovale**.

**Dateien zu allen Teilen** finden Sie auf der Website bei 09 Barock -> Lemniskaten.

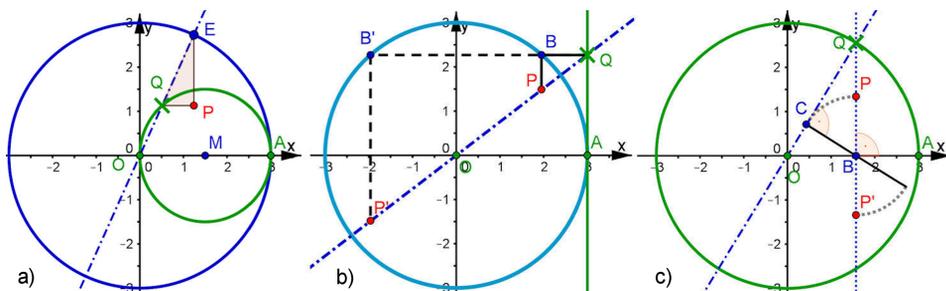
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 4.4.2.1 Lemniskate von Gerono

#### Aufgabe 4.8 Andere Konstruktionen für die Gerono'sche Lemniskate

Zu den drei Erzeugungsweisen in Abb. 4.18 gesellt sich noch die Darstellung als Lissajous-Kurve, siehe Abschnitt 8.2.



**Abb. 4.18** Gerono'sche Lemniskate in drei Konstruktionen: a) Gerono'sche Lemniskate als allgemeine Versiera nach Definition 4.1, b) eine etwas andere Konstruktion, c) Konstruktion mit zwei Loten und einer Längenübertragung

1. Woran kann man sehen, dass alle Gerono'schen Lemniskaten mathematisch ähnlich sind?
2. Bauen Sie die Konstruktionen nach und tragen Sie zum Vergleich die kartesische Gleichung 4.33 ein.
3. Die Herleitung der kartesischen Gleichung ist bei Konstruktion b) besonders einfach, für a) lesen Sie den Hinweis.

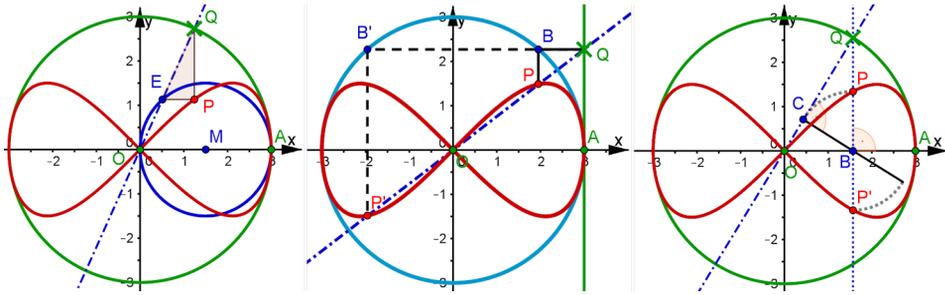
#### Hinweis

Zu 3.: Für den Beweis von a) hilft die unterste Zeile von Satz 4.1 in Abschnitt 4.1.4.3. Sie führt auf  $(u - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ ,  $x^2 + t^2 = a^2$ ,  $xy = ut$ . Denken Sie an den Eliminate-Befehl von <http://www.wolfram-alpha.com>. Eine Erklärung finden Sie in Abschnitt 3.1.1.5. ◀

#### Lösung:

**Zu 1. Ähnlichkeit** Am besten sieht man diese an der Polargleichung, der Faktor  $a^2$  bewirkt lediglich eine zentrische Streckung.

**Zu 2. Konstruktionen** Auf der Webseite sind die Konstruktionen sowohl einzeln in GeoGebra zu haben, als auch in einer Gesamt-Datei für „Gerono 1“, als Mittenkurve von Parabeln, „Gerono 2“, als Versiera von zwei Kreisen (Bild a), „Gerono 3“, als Konstruktion in Bild b). Dadurch dass man je zwei Konstruktionen gleichzeitig einschalten kann, sieht man, wie alles zusammenpasst. Ein Beweis wird daraus erst, wenn man sich klar macht, wie man die eine Konstruktion aus der anderen erzeugen könnte.



**Abb. 4.19** Gerono'sche Lemniskate in drei Konstruktionen: a) Gerono'sche Lemniskate als allgemeine Versiera nach Definition 4.1 , b) eine etwas andere Konstruktion, c) Konstruktion mit zwei Loten und einer Längenübertragung

**Zu 3. Rechnerische Beweise** für Bild b) „Gerono 3“: Es ist  $Q = (a, v)$  und nach dem Strahlensatz  $vx = ay$ . Der Punkt  $B = (s, t)$  liegt auf dem Kreis  $s^2 + t^2 = a^2$  und es gilt  $x = s$  und  $v = t$ . Somit folgt  $x^2 + v^2 = a^2$  und dann  $x^2 + \left(\frac{ay}{x}\right)^2 = a^2$ . Wir haben  $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$ , Gleichung 4.33, wie erwartet.

Für Bild c) „Gerono 4“ gibt es eine Extradatei, ein geometrischer Beweis ist mir nicht eingefallen. Rechnerisch verwende ich den Höhensatz für das Dreieck  $OBQ$  mit den Hypotenusenabschnitten  $b$  und  $a - b$ . Dann gilt  $y^2 = \overline{CB}^2 = b(a - b)$ . In den ähnlichen Höhendreecken gilt  $\frac{b}{x} = \frac{y}{v}$ , also folgt  $y^2 = \frac{yx}{v} \left(a - \frac{yx}{v}\right)$ . Mit  $x = u$  gilt für den Weg von  $Q$  nun  $x^2 + v^2 = a^2$  und wir haben zwei Gleichungen, aus denen wir nur noch  $v$  eliminieren müssen. Das führt tatsächlich auch zu  $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$ .

#### 4.4.3 Gelenke und Stangenkonstruktionen

#### 4.4.4 Konstruktion der Kegelschnitte mit einem Faden

#### 4.4.5 Spezielle Ellipsen-Zirkel und Stangenkonstruktion der Ellipse

## In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

### 4.4.6 Dampfmaschine und andere technische Gelenke

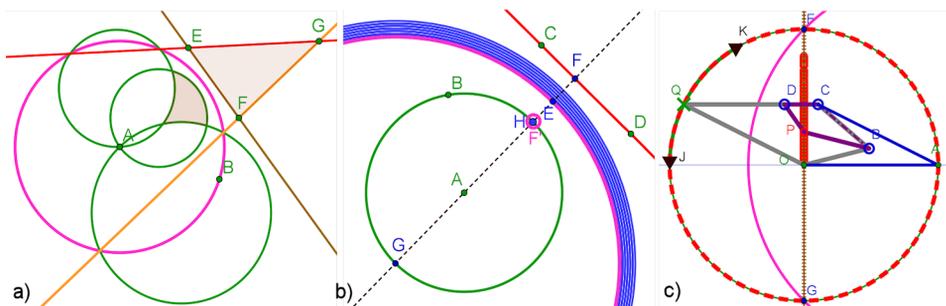
#### Aufgabe 4.9 Mit der Inversion spielen

Wie oben gesagt gibt es noch den Abschnitt 9.5, in dem Sie lernen können, wie man die Kreisspiegelung einführen und dann **selbst** konstruieren kann. In dieser Aufgabe aber machen Sie sich mit den Phänomenen vertraut, indem Sie den Button „Kreisspiegelung“ in GeoGebra verwenden.

1. Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius  $k$  um den Ursprung. Es ist der Inversionskreis. Zeichnen Sie außerhalb des Kreises ein beliebiges Dreieck. Markieren Sie es und nehmen Sie den Button „Spiegele an Kreis“ und klicken Sie Ihren Kreis an. Vermutlich verblüfft Sie das gebogene Bild des Dreiecks. Ziehen Sie eine Ecke des Dreiecks in der Zeichenebene umher, auch in den Inversionskreis hinein und nähern Sie sich dem Ursprung. Lesen Sie nochmals den letzten blauen Kasten und deuten Sie die Verformung Ihres Dreiecks entsprechend.
2. Bauen Sie das Drachengelenk von Kempe aus Abb. 4.41 b) nach. Achten Sie darauf, dass der kleine Drache wirklich mathematisch ähnlich dem größeren grauen Drachen links sein *muß*. Welchen Weg nimmt  $P$ , wenn  $Q$  auf dem Kreisbogen wandert?
3. Probieren Sie in einer leeren GeoGebra-Datei aus, wie Sie zu einem beliebigen Paar aus Kreis und Gerade den Inversionskreis, der Ihren Kreis in Ihre Gerade überführt, experimentell finden.
4. Wenden Sie Ihre Strategie an, um den Inversionskreis im Drachengelenk von Kempe zu finden.

**Lösung:** Es ist die volle Absicht dieser Aufgabe, dass man sich der Kreisspiegelung experimentell nähert. Rechnungen und Konstruktionen, wie sich im Anschluss an Abschnitt 9.5. möglich wären, bringen hier keinen Erkenntnisgewinn. Versuchen Sie als Erstes, die Anregungen zu befolgen, die schon in der Aufgabe stehen, und sehen Sie erst dann nach, wie hier gezeichnet und argumentiert wird.

**Zu 1.: Bild eines Dreiecks und der Geraden, die seine Seiten enthalten** Zuerst zieht man wirklich nur ein Dreieck ein verschiedener Gestalt und Lage umher. Verfolgt man den naheliegenden Gedanken, Geraden durch die Eckpunkte zu legen und auch diese mit Kreisspiegelungsbutton an dem violetten Inversionskreis zu spiegeln, gewinnt man bessere Übersicht. Abb. 4.20 a) (hier) zeigt die Dreiecksseiten als Bögen von Kreisen, die durch das Inversionszentrum  $A$  verlaufen. Bei den Geraden, die den Inversionskreis schneiden, erkennt man deutlich, dass die Bildkreise im Zentrum die Richtung „ihrer eigenen“ Urbildgeraden haben. Ein Lot vom Zentrum auf die Urbildgerade ist also Symmetrieachse. Das gilt auch für die Gerade  $EF$  und ihren Bildkreis. Das passt zum blauen Kasten Seite 129 (Buch).



**Abb. 4.20** Aufgabe 4.9 mit der Inversion spielen, Inversion und Gelenke

**Zu 2.: Drachengelenk von Kempe** Die GeoGebra-Datei ist schon bei Abb. 4.41 auf der Website 04 Barock->Gelenke verlinkt. Wenn man  $Q$  auf dem Bogen zieht, bewegt sich  $P$  senkrecht zu  $OA$  auf einer Geraden.

**Zu 3.: Inversionskreis zu beliebigem Kreis und beliebiger Geraden als Paar Urbild-Bild** Klar ist, dass das Inversionszentrum sowohl auf dem Rand des grünen Urbildkreises liegen muss als auch auf dem Lot auf die Bildgrade. Falls diese Schnittpunkte mit dem Urbildkreis hat, sind diese Fixpunkte und legen den Radius des Inversionskreises fest. In Abb. 4.20 b) ist nur der Fall gezeigt, in dem man einen vorläufigen Kreis durch einen Hilfspunkt  $E$  konstruiert und für den Lotfußpunkt  $F$  den Kreisspiegelpunkt  $F'$  bildet. Nun lässt man  $E$  auf dem Lot rücken, bis  $F'$  den Urbildkreis erreicht.

**Zu 4.: Inversionskreis zum Kempe-Drachen** In Abb. 4.20 c) erkennt man, den einfachen Fall, dass der Punkt  $A$  das Zentrum sein muss und der Schnitt der Wandergraden von  $P$  mit dem Kreis um  $O$  durch  $Q$  den Inversionskreis bestimmt.

**Anmerkung:** Das passt hier alles schön. Aber der blaue Kasten Seite 129 (Buch) wird wirklich erst in Abschnitt 9.5.2 streng bewiesen. Genau genommen müssten wir auch die Bewegung des Kempe-Drachens genauer unter die Lupe nehmen. Sehen Sie dieses als sinnvolles Element eines „Spiralcurriculums“ an.

Die GeoGebra-Dateien sind auf der Website im Bereich 09 Barock-> Gelenke.

#### 4.4.7 **Ausblick**



# 5 Frei erfunden und hoch hinaus

---

## Übersicht

5.1	Frei erfundene geometrisch erzeugte Kurven .....	59
5.2	Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven .....	65
5.3	Hoch hinaus in den Raum .....	70

---

## 5.1 Frei erfundene geometrisch erzeugte Kurven

### 5.1.1 Die D-Kurve aus der Einleitung

### 5.1.2 Die deutsch-*d*-Kurve

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 5.1.3 Die Topfblumen-Kurven

#### Aufgabe 5.1 Variationen zu Topfblumen

Am meisten Freude am mathematischen Tun hätten Sie, wenn Sie die Dateien nachbauten – oder die von der Website nähmen – und sich die Wandlung der Formen bei Variation von  $a$  und  $b$  ansähen. Dann kämen die Fragen von allein und Sie hätten Lust, sie sich selbst zu beantworten. Für Begründungen ist die **Betrachtung der Geometrie sinnvoll und auch mathematisch wertvoll**. Wenige Antworten wird man von der Gleichung zu erwarten haben. Verabschieden Sie sich (ggf.) von dem Anspruch: ein Beweis muss immer „errechnet“ werden.

1. In Abb. 5.3 (Buch) liegt der Ursprung  $O$  um 0.01 höher als der Kreis, denn  $a = 2.01$  und  $b = 2$ . Sehen Sie sich an, wie empfindlich die violette Topfblume auf winzige Änderungen von  $a$  reagiert. Die rote Topfblume ist in diesem Parameterbereich „robuster“.
2. Sehen Sie sich die Abb. 3.7 im Vergleich mit der violetten Topfblume an. Es ist eine Parabel-Konchoide. Auch die Parabel liegt nur sehr knapp unter dem Ursprung. Die Parabel-Konchoide hat ebenfalls oben die Pilzform, aber unten biegen sich die Äste nicht zusammen wie sie es bei der violetten Topfblume tun, die – wie oben gezeigt – eine Kreis-Konchoide ist.
3. Warum erhält man für  $a = b$  eine Pascal'sche Schnecke nach der Konstruktion in Abb. 3.5? ( $A = (-a, 0)$ , Mittelpunkt des grünen Kreises, dessen Radius  $b$  ist, in der Datei ist es  $r$ .)
4. Was macht die Wahl  $a = 0$  mit den Topfblumen? Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichung, dass aus der roten Topfblume zwei Kreise werden. Nehmen Sie als Erfahrung mit, dass in solchen Grenzfällen das Ortslinien-Werkzeug Schwierigkeiten hat. Für die violette Topfblume ergibt sich eine geometrisch klare Situation.
5. Bestimmen Sie aus der Geometrie die Schnittpunkte der Topfblumen mit der  $y$ -Achse. Rechnerisch kommen natürlich mit CAS dieselben Schnittpunkte heraus, von Hand ist eine Gleichung 4. Grades übrig, bei der man nur Chancen hat, wenn man Lösungen weiß. Eben: man weiß sie!
6. Konstruieren Sie gemäß Abschnitt 5.1.3.2 die Enkel-Kurven zu den Topfblumen. Für die rote Topfblume mit  $a = b$  kommt eine „Blumenknolle“ heraus, die schon ausgetrieben hat.

#### Hinweis

Die Dateien finden Sie wie immer auf der Website zum Buch. ◀

**Lösung:** In der zu dieser Aufgabe und Abb. 5.3 (Buch S. 136) gehörigen GeoGebra-Datei sind alle Topfblumenkurven einzeln oder gemeinsam zu betrachten. Dadurch kann man

besser über Zusammenhänge und Besonderheiten nachdenken, als wenn es Einzeldateien gäbe.

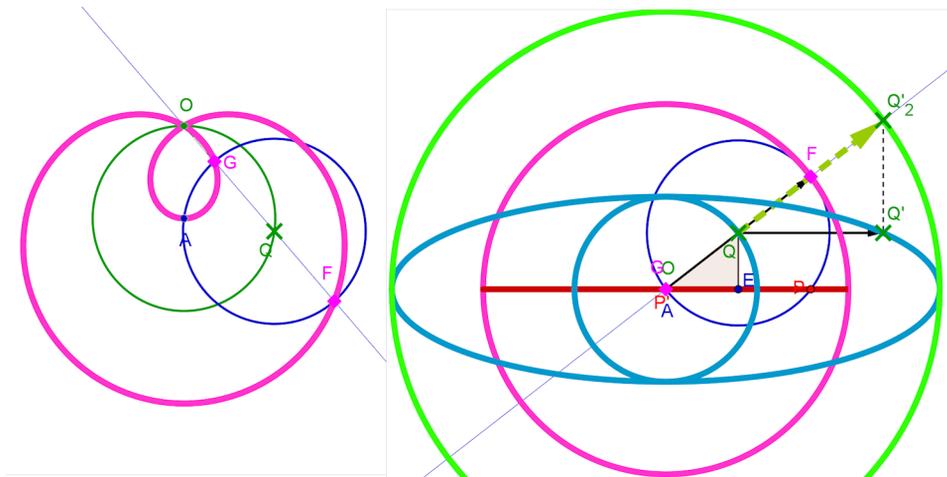
**Zu 1. und 2. und 6.** Tun Sie es wirklich!

**Zu 3. Der grüne Kreis trifft den Ursprung** In diesem Fall ist die Konstruktion für die violette Topfblume tatsächlich genau diejenige für eine Pascal'sche Schnecke, bei der die Leinenlänge gleich dem Radius des Wanderkreises ist. Siehe Abb ?? a) hier.

**Zu 4. Der grüne Kreis hat den Ursprung als Mittelpunkt** Für die rote Topfblume ist  $E$  per Konstruktion auf der  $x$ -Achse. damit auch  $P$  und  $P'$  und die ganze geometrische Ortskurve. Rechnerisch folgt mit  $a = 0$  aus der Gleichung S. 137 nun  $y^2(x^2+y^2)^2 = 4b^2y^4$ . Hier ist die  $x$ -Achse eine Doppellösung, aber auch  $x^2 + y^2 = \pm 2by$ , das sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten  $(0, \pm b)$ . Diese haben keine geometrische Entsprechung.

Für die **violette Topfblume** wird der Radiusvektor von  $O$  nach  $Q$  verdoppelt und es ergibt sich ein Ursprungskreis mit dem Radius  $2a$ . Die zugehörige Enkelkurve (in Abb. 5.1 hellgrün) ist ebenfalls ein Ursprungskreis, aber mit dem Radius  $3a$ .

Die **Enkelkurve** der zum Strich der auf der  $x$ -Achse zusammengeschmolzenen roten Topfblume ist **überraschend eine Ellipse**. Per Definition der Enkelkurven in Abschnitt 5.1.3.2 ist es ja diejenige Kurve, die als  $C_2$  genommen werden müsste, um mit dem grünen Kreis als  $C_1$  die rote Topfblume als Cissoide zu erhalten. Abb. 5.1 zeigt eindrucksvoll, dass für diese Ellipse die hellgrüne Enkelkurve der Hauptkreis und der gegebene Wanderkreis von  $Q$  (in der Abb. hellblau übermalt) der Nebenkreis ist. Sie hat die Gleichung  $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .



**Abb. 5.1 Aufgabe 5.1 Topfblumen-Sonderfälle** links: zu 3 Wanderkreis von  $Q$  enthält den Ursprung  
rechts: zu 4. Wanderkreis von  $Q$  hat den Ursprung als Mittelpunkt

**Zu 5. Schnitte mit der  $y$ -Achse** Überlegen, Hinsehen oder Rechnung ergibt als Schnittstellen mit doppelt  $y = 0$  und  $y = -a$ , einfach  $y = -a \pm 2b$

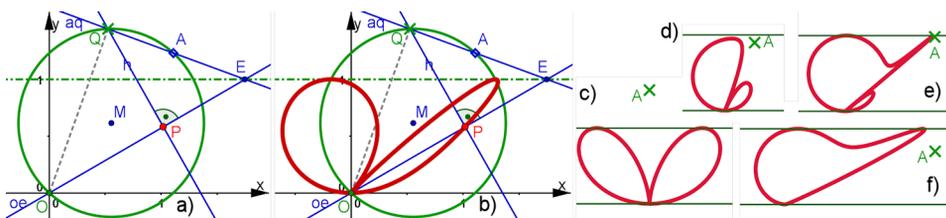
# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 5.1.4 Das gefangene Zweiblatt

### Aufgabe 5.2 Erkundungen des Zweiblattes

Beide Konstruktionen erzeugen *dasselbe* Zweiblatt, denn in der Konstruktion aus Abb. 5.2a) (hier) ist der rechte Winkel bei  $Q$ , der in der zweiten Konstruktion gefordert wird, dadurch gesichert, dass der grüne Kreis als Thaleskreis über  $\overline{OA}$  aufgefasst werden kann.  $\overline{QP}$  ist also in beiden Fällen die Höhe in dem rechtwinkligen Dreieck  $OEQ$ .



**Abb. 5.2** Das gefangene Zweiblatt (Buch Abb. 5.4 S 139 a) Konstruktion b) Zweiblatt c)-f) Das Zweiblatt mit anderen Lagen von Punkt  $A$ : c) (0,1.5) d) (0.4,0.9) e) (1.2,0.98) f) (2,0.5)

1. Wann liegt  $A$  auf dem Zweiblatt? Argumentieren Sie geometrisch *und* mit der Gleichung.
2. Wo schneidet das Zweiblatt die  $y$ -Achse außer in  $y = 0$ ?
3. Die Frage nach gemeinsamen Punkten mit der Geraden  $y = w$  führt auf  $x = \frac{1}{2} \left( p \pm \sqrt{p^2 + 4wq - 4w^2} \right)$  und beide Schnittstellen sind doppelt. Was können Sie daraus schließen? Was haben die Schnittpunkte mit dem Kreis aus der Konstruktion Abb. 5.2a) (hier) zu tun? Beachten Sie ggf. den Hinweis.
4. Wie können Sie mit den Erkenntnissen aus dem vorigen Punkt begründen, dass das Zweiblatt in dem Streifen aus der  $x$ -Achse und der Gerade  $y = w$  gefangen ist.
5. Wenn man  $A$  langsam von oben auf die Gerade  $y = w$  zieht, wird das eine Blatt immer schmaler, die Kurve scheint instabil zu sein, das schmale Blatt verschwindet kurz, dann entsteht unten ein neues kleines Blatt. Setzt man für  $q$  das  $w$  in die Gleichung ein, ergibt sich in <http://www.wolfram-alpha.com> nach Vereinfachung mit //Simplify dann  $(-wx + py)(x^2 + y(-w + y)) = 0$ . Deuten Sie damit die beschriebenen Phänomene.

### Hinweis

Zu 3.: Tragen Sie die Parabel  $y = w - \frac{1}{4w}x^2$  in die Zeichnung ein. Bewegen Sie  $A$  in den Parabelbogen hinein und wieder heraus. Beobachten Sie, was sich bezüglich des Schnittes mit  $y = w$  ändert. Überlegen Sie, wo die Gleichung der Parabel herkommt. Bedenken Sie, dass Sie evtl. mit dünnen Strichdicken und starkem Zoom scheinbare Widersprüche auflösen können.

Die Datei zum Zweiblatt finden Sie auf der Website zum Buch. ◀

**Lösung:** Zuerst sollten Sie mit dem Zweiblatt spielen. Dann finden Sie selbst Fragen und ihre Antworten.

**Zu 1.: A auf dem Zweiblatt**  $A$  liegt immer auf der Kathetengeraden  $EQ$  des rechtwinkligen Dreiecks  $OEQ$ , aber  $P$  ist dessen Höhenfußpunkt. Zusammenfallen dieser beiden ist nur in dem Sonderfall  $A = E$  möglich, also wenn  $A$  auf der Geraden  $g_w$  mit  $y = w$  liegt. Dann fällt das Zweiblatt zu einer Durchmesserstrecke zusammen.

Rechnerisch müsste  $A = (p, q)$  die Gleichung  $(x^2 + y^2)(y^2(p^2 + q^2) + w^2(x^2 + y^2)) = wy(2(x^2 + y^2)(px + qy) + (qx - py)^2)$  erfüllen, was auf  $(p^2 + q^2)(q - w) = 0$  führt. Das wird ausschließlich von  $q = w$  erfüllt.

**Zu 2.: y-Achsenschnitt?** Mit  $x = 0$  ergibt sich  $y = \frac{p^2 w}{p^2 + (q-w)^2}$ . Der Fall  $p = 0$  ist in Abb. 5.2 c) (hier) als symmetrisches Zweiblatt gezeigt. Wenn nun  $q \neq w$ , ergibt sich stets ein weiterer Punkt des Zweiblattes auf der y-Achse.

**Zu 3. und 4.: Berührung der Geraden  $g_w$**  Mit  $y = w$  ergibt sich mit Faktorisierung  $w^2(-px - qw + w^2 + x^2)^2 = 0$ . Man sieht, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung aus der Klammer doppelt gezählt werden müssen. Der grüne Kreis hat die Gleichung  $(x - \frac{p}{2}) + (y - \frac{q}{2}) = \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4}$ . Das ist kurz  $x^2 - px + y^2 - qy = 0$ . Man sieht nun auch rechnerisch, dass das Zweiblatt die Gerade  $g_w$  in den Schnittpunkten mit dem grünen Kreis berührt. Die Berührung muss „von unten“ erfolgen, da weitere Schnitte mit der Geraden  $g_w$  nicht vorhanden sind. Wir betrachten o.B.d.A nur  $w \geq 0$ ,  $P$  liegt auf  $OE$  auf damit niemals unterhalb der x-Achse. Das Zweiblatt ist gefangen im Streifen  $y = 0$  bis  $y = w$ .

**Zu 4.: Parabel-Diskriminante** Die eben berechnete Berührung findet nur statt, wenn die Diskriminante in der und 3. genannten Wurzel nicht-negativ ist. Mit  $y = q$  muss also  $y > w - \frac{x^2}{4w}$  sein. Zeichnet man die Parabel als Rand der Ungleichung ein, so gibt es für  $A$  im konkaven Bereich der Parabel **kleine Zweiblattkurven**, die die Gerade  $g_w$  nicht mehr erreichen, gezeigt in Abb. 5.2 d) (hier).

**Zu 5.: Phänomene bei A fast auf  $g_w$**  Abb. 5.2 e) (hier) zeigt so einen Fall. Die angegebene Gleichung ist ein Produkt aus der Geraden  $y - \frac{w}{p}x = 0$ , also der Geraden  $OA$  im Sonderfall aus 1. und dem Kreis  $x^2 + (y - \frac{w}{2})^2 - \frac{w^2}{4} = 0$ . Im Umgang mit der Datei sieht man, dass es durchaus Punkte  $P$  auf diesem Kreis gibt:  $E$  liegt in diesem Fall nämlich nicht fest und  $EA$  ist die Gerade  $g_w$ .

**Fazit:** Die Konstruktion ohne Kreis hat mein Kollege Dieter Riebesehl erfunden, ich habe dann den Kreis „gesehen“. Es ist faszinierend, wieviel schöne Mathematik in einer solchen frei erfundenen Aufgabe steckt.

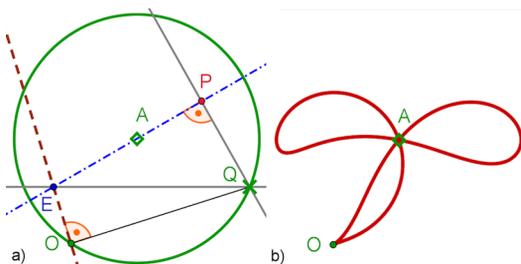
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 5.1.4 Das gefangene Zweiblatt und das Zweikeimblatt

#### Aufgabe 5.3 Zweikeimblatt im Wind

Buchen und viele andere Pflanzen sind „zweikeimblättrig“, als Erstes entfalten sich zwei Blättchen. Lassen Sie sich überraschen, wie sich beim Ziehen von  $A$  das mathematische Zweikeimblatt „im Wind“ bewegt.



#### Abb. 5.3 Zweikeimblatt im Wind

Zu einem freien Punkt  $A$  wird  $Q$  zugfest auf einen Kreis um  $A$  durch den Ursprung  $O$  gesetzt. Die Senkrechte auf  $OQ$  in  $O$  schneidet die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $Q$  in  $E$ .  $P$  ist der Fußpunkt des Lotes von  $Q$  auf die Gerade  $EA$ . Die Ortskurve von  $P$  bezüglich  $Q$  ist das Zweikeimblatt.

Bewegen Sie  $A$  frei in der Ebene. Überlegen Sie, warum das Zweikeimblatt nie aus seinem Erzeugungskreis herausragt.

Liegt  $A$  auf der  $x$ -Achse, kommt eine Lemniskate heraus. Ist es die Lemniskate von Bernoulli (siehe Abschnitt 4.4.1)?

#### Hinweis

Ergänzen Sie evtl.  $B$  so, dass  $A \in \overline{EB}$  ist. Eine Gleichung für das Zweikeimblatt müsste den Grad sechs haben. Die Suche danach ist nicht vielversprechend. ◀

**Lösung:** Dies ist wieder eine Aufgabe, die man **wirklich hantieren** muss.

Das Blatt kann nicht aus dem Kreis heraus. Um das zu zeigen seien  $B$  und  $B'$  die Schnittpunkte des Wanderkreises mit  $EA$ , wie im Hinweis. Eine Senkrechte in  $B$  oder  $B'$  auf  $EA$  ist dann Tangente an den Kreis, trifft keinen weiten Kreisbogen, also auch nicht  $Q$ . Damit muss  $P$  als Lotfußpunkt zwischen  $B$  und  $B'$  liegen, also innerhalb des Kreises.

Liegt  $A$  auf der  $x$ -Achse, entsteht eine Lemniskate, die ganz deutlich **keine rechten Winkel** der Tangenten im Doppelpunkt hat. Die Abszisse von  $A$  hat dabei keinen Effekt auf die Form der Lemniskaten, sie bewirkt lediglich eine Maßstabsveränderung.

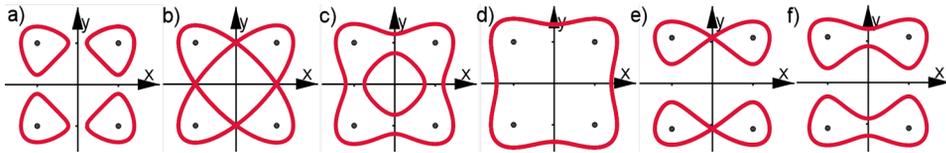
# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 5.2 Frei erfundene Gleichungen und ihre Kurven

### Aufgabe 5.4 Kurvenfamilie mit isolierten Punkten im Grenzfall

Es geht um die Kurven mit der Gleichung  $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = h$ . Abb. 5.4 zeigt Bilder für einige Werte von  $a, b, h$ .



**Abb. 5.4** Aufgabe 5.4 Isolierte Punkte im Grenzfall

1. Geben Sie die Gleichung ein und experimentieren Sie mit Schiebereglern  $a, b, h$ . Versuchen Sie, die in Abb. 5.4 gezeigten Fälle zu finden.
2. Wann und warum haben die Bilder die  $x$ -Achse, die  $y$ -Achse oder beide Achsen als Symmetrieachsen.
3. In Abb. 5.4 b) scheinen sich zwei Ellipsen zu schneiden. Denken Sie sich eine Strategie aus, wie Sie dies untermauern, beweisen oder widerlegen.
4. Von Bild c) nach Bild d) ist  $h$  verändert. Für welches  $h$  verschwindet das innere Oval?
5. Vergleichen Sie die gegebenen Kurven mit  $x^2(x - 2a)^2 + y^2(y - 2b)^2 = h$ .

### Hinweis

Sie können die Fragen elementar beantworten. Eine schöne Übersicht aber bietet die 3D-Sicht, die im Abschnitt 5.3 vorgestellt wird. Als Werkzeug ist GeoGebra geeignet, wenn Sie  $a, b, h$  zwischen 0 und 2 wählen. Die Datei finden Sie auch auf der Website zum Buch.

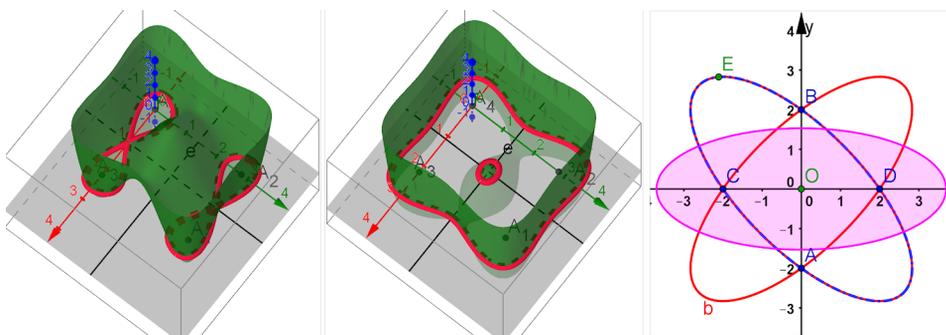


**Lösung:** Auf der Website im Bereich 05 Frei und hoch ist nun eine gute GeoGebra-Datei zu finden, bei der die Funktion  $z(x, y) = (x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 - n$  als „Topf mit vier Beinen“ im 3D-Grafikfenster dargestellt ist. Im Laufe der Arbeit an diesem Buch haben sich die 3D-Möglichkeiten erheblich verbessert. Die Erhöhung von  $n$  senkt den Topf ab, die Schnittkurven mit der Grundebene sind in beiden Fenstern leicht zu erkennen.

**Zu 1.: Erscheinungsformen** Die vier **isolierten Punkte**  $(\pm a, \pm b)$  für  $n = 0$  sind schon im Text erwähnt. Für  $a = b$  gibt es in Abb. 5.6 (Buch) von a) bis d) die doppelt-achsensymmetrischen Formen, die auch zu den Winkelhalbierenden symmetrisch sind. Die letztgenannte Symmetrie geht bei  $a \neq b$  verloren.

**Rechnung für e):**  $x = 0$  folgt  $(y^2 - b^2)^2 = n - a^4$ . Also wenn  $n \geq a^4$  wird, wachsen je zwei Inseln auf der  $y$ -Achse zusammen. Das geschieht im Falle  $b > a$  bei wachsendem  $n$  eher als das Entsprechende für die  $x$ -Achse. Daher zeigen e) und f) an, dass  $b > a$  ist.

**Zu 3.: Ellipsen** Für den Fall Abb. 5.6 b) gilt also  $a = b$  und  $n = a^4$ . Daraus folgt  $(x^2 - a^2)^2 = y^2(2a^2 - y^2)$ . Gibt man dies in GeoGebra ein, so sieht man die beiden Ovale. Deren Achsenschnittpunkte und ein weiteren Punkt auf der Kurve verwendet man für „Kegelschnitt aus 5 Punkten“. Tatsächlich erscheint dieser genau auf dem einen Oval. Mit dem Button „Drehung“ und  $45^\circ$  richtet man dieses waagrecht aus und erhält, wie erwartet, eine achsenparallele Ellipse und dazu eine offensichtliche Ellipsengleichung un Mittelpunktslage.



**Abb. 5.5** Aufgabe 5.4 3D-Sicht und Ellipsenschnitt

**Zu 4.: Das innere Oval** In der 3D-Sicht erkennt man im Inneren des Topfes einen Hügel. Er hat die Höhe  $(0 - a^2)^2 + (0 - b^2)^2 - n$ , sinkt mit wachsendem  $n$  nach unten und verschwindet für  $n = a^4 + b^4$ .

**Zu 5.: Verschobener Topf** Aus der Gleichung  $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - b^2)^2 = n$  entsteht durch die 3. binomische Formel  $(x + a)^2(x - a)^2 + (y + b)^2(y - b)^2 = n$  eine implizite Gleichung, die durch Verschiebungen  $x \rightarrow x - a$  und  $y \rightarrow y - b$  in  $x^2(x - 2a)^2 + y^2(y - 2b)^2 = n$  übergeht. Also handelt es sich um einen mit dem Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  verschobenen Topf. Dieser ist in der GeoGebra-Datei gezeichnet.

### 5.2.1 Term-Sensibilisierung

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 5.2.2 „Konchoiden“ von Baron de Sluze

### Aufgabe 5.5 Baron de Sluzes Familie als Cissoiden-Familie

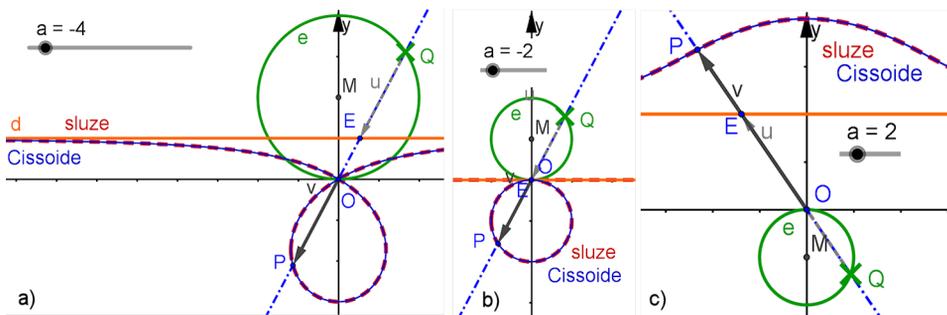
1. Um welche Kurven handelt es sich bei  $C_1$  und  $C_2$ ?
2. Entwickeln Sie daraus eine geometrische Konstruktion aller Kurven des Barons de Sluze, probieren Sie diese in GeoGebra aus und zeigen Sie die Übereinstimmung mit der kartesischen Gleichung.
3. Beschreiben Sie diese Konstruktion so, dass sie ohne weitere Kenntnisse durchführbar ist.
4. Zeigen Sie als Fortsetzung zum letzten Absatz vor dieser Aufgabe, dass auch die **Trisektrix** eine spezielle Kurve aus der Familie der Baron-Sluze-Kurven ist.

#### Hinweis

Es ist gleichgültig, ob Sie in der in Abb. 5.8 gezeigten Koordinatenlage argumentieren oder in der zumeist im Buch gewählten Lage. Das Anpassen der Gleichungen ist eine gute Übung. ◀

**Lösung:** Im Text vor der Aufgabe ist die Auffassung der Kurven des Barons der Sluze als Cissoiden diskutiert worden. Wie im blauen Kasten auf Seite 72 zeigt die Polargleichung am deutlichsten die beiden beteiligten Kurven.

**Zu 1. Cissoiden** Als  $C_1$  dient der grüne Kreis mit dem Mittelpunkt  $(0, \frac{-a}{2})$ , der den Ursprung enthält.  $C_2$  ist dann die waagerechte Gerade  $y = b$ .



**Abb. 5.6** Aufgabe 5.5 Baron de Sluze-Kurven als Cissoiden

- a) Mit  $b = 1$  und  $a = -4$  ist es die Trisektrix (siehe zu 4.)
- b) Mit  $b = 0$  ist jede Sluze-Kurve ein Kreis vereint mit der x-Achse
- c) Für positive  $a$  und  $b$  ergeben sich Bögen oberhalb der Asymptote  $y = b$

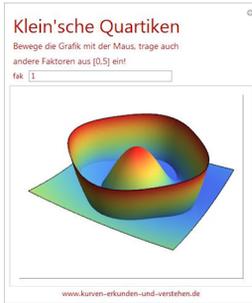
**Zu 2. und 3.: Geometrische Konstruktion** . Gezeigt in Abb. 5.6. Setze  $Q$  zugfest in 1. genannten Kreis. Die Gerade  $OQ$  schneide  $y = b$  in  $E$ . Hänge den Vektor  $\vec{QE}$  an  $O$  an. Die neue Spitze zeigt  $P$ . Die Gleichung folgt aus Gleichung 5.2 (Buch) mit den Grundgleichungen 2.6.

**Zu 4. Trisektrix** Nach Gleichung 3.17 von Seite 69 und Abb. 3.23 b) von Seite 70 ist die Trisektrixgleichung  $(1 - x)y^2 = (3 + x)x^2$ . Die an  $y = x$  gespiegelte Sluze-Kurve zu Abb. a) hat die Gleichung  $(x - 1)(x^2 + y^2) = -4x^2$ . Kurze Umformung ergibt  $(1 - x)y^2 = (x - 1)x^2 + 4x^2$  und im nächsten Schritt folgt die Behauptung: Diese Baron-Sluze-Kurve ist eine Trisektrix.

### 5.2.3 Wandelfisch

### 5.2.4 Mathematik und eigene Erfindungen

## 5.3 Hoch hinaus in den Raum



**Abb. 5.7** Aufgabe 5.6 Zu 1.: Neil'sche Parabel 3D  
a) Algebrafenster, b) 2D-Fenster, c) 3D-Fenster

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, Website zum Buch

## 5.3.1 Familien der raumverwandten Kurven

### Aufgabe 5.6 Raumverwandte der Kurven

Die obigen Darstellungen und Überlegungen lassen sich leicht auf andere Kurven übertragen. In GeoGebra ist es günstiger, die Raumfläche zu verschieben und die Schnitte mit der Grundebene zu betrachten. Dort können auch die Funktionen  $f$  mit angezeigt werden. Man sieht dann, ob alles passt.

1. Untersuchen Sie die Raumverwandten der Neil'schen Parabel mit der kartesischen Gleichung  $F(x, y) = x^3 - y^2 + c$  sowohl im 3D-Fenster als auch durch Betrachtung von  $f(x) = y = \sqrt{x^3 + c}$ . Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  die y-Achse stets waagrecht schneidet und deuten Sie dieses in der räumlichen Version. (Bezug: Gl. ??)
2. Untersuchen Sie entsprechend die Cissoide des Diokles mit der Gleichung  $F(x, y) = x^3 - (2-x)y^2 + c$  (**Fehlerteufel: in der Klammer  $x$  statt  $y$ !**) und die passende Funktion  $f$  (Bezug: Gl. 3.18). Vergleichen Sie mit dem  $f$  aus der Neil'schen Parabel.
3. Die gerade Strophoide mit der Gleichung  $z = z(x, y) = (a + x)x^2 - (a - x)y^2 + c$  (**Fehlerteufel: in der ersten Klammer  $+$  statt  $-$ !**) hat als Raumfläche einen Extrahügel ähnlich der Trisektrix in Abb. 5.11 (Buch). Untersuchen Sie die raumverwandten Kurven der Strophoide (Bezug: Gl. 3.9). Welche Koordinaten hat das Hügelmaximum (für  $c=0$ )?
4. Berechnen Sie selbst die Punkte  $H$  und  $H_v$  aus dem obigen Abschnitt zur Konchoide.

### Hinweis

Alle diese Kurven ließen sich nach  $y$  auflösen. Daher können Sie für die Untersuchungen Ihre üblichen Analysis-Methoden und Werkzeuge anwenden. ◀

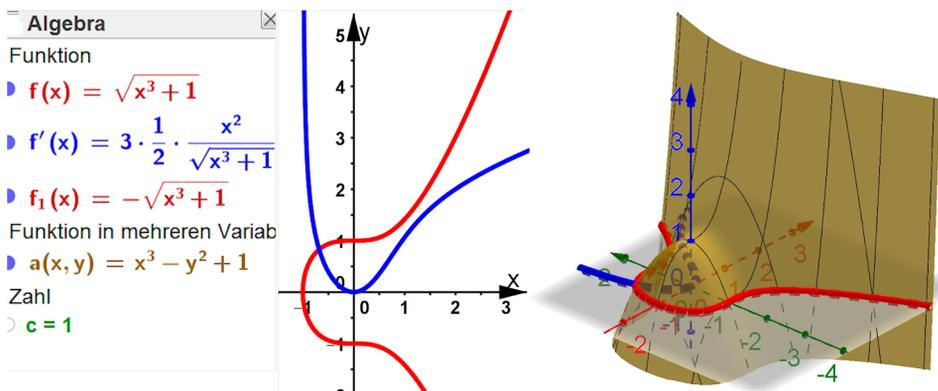


Abb. 5.8 Aufgabe 5.6 Zu 1.: Neil'sche Parabel 3D  
a) Algebrafenster, b) 2D-Fenster, c) 3D-Fenster

**Lösung: Abb. 5.8 (hier), zu 1.: Raumverwandte der Neil'schen Parabel** Für positive wachsende  $c$  kommt der braune Wulst immer mehr nach oben, dabei schneiden die Schnittkurven mit der Grundfläche, also die Raumverwandten der Neil'schen Parabel, die (grüne)  $y$ -Achse stets waagrecht. Im Algebrafenster sieht man im Zähler der Ableitung  $x^2$  unabhängig von  $c$ . Für  $c = 0$  erhält man die Neil'sche Parabel selbst mit ihrer Spitze im Ursprung, im Bild c) kann man sie sich vorstellen in einer Ebene in der Höhe 1. Noch höhere Ebenen schneiden die „Hinterwand“ nur in einem Bogen, der für  $y = 0$  eine zur  $y$ -Achse parallele Tangente hat. Diese Fälle entsprechen negativen Werten von  $c$ , im 2D-Fenster gibt es dann keine waagerechten Tangenten mehr.

**Zu 2.: Raumverwandten der Cissoide des Diokles** Da diese Cissoide wie die Neil'sche Parabel eine Spitze im Ursprung hat, ergibt sich als zugehörige 3D-Raumfläche eine sehr ähnliche Form. Aber die zugehörigen raumverwandten Kurven haben für  $c > 0$  keine waagerechten Tangenten mehr. Das sieht man am Zähler der 1. Ableitung. Für  $c < 0$  gilt dasselbe wie oben. Wie die Cissoide selbst haben die Raumverwandten auch die Asymptote  $x = 2$  und für größere  $x$  keine reellen Werte mehr. Die GeoGebra-Datei ist auf der Website.

**Zu 3.: Strophoide** Schnittkurve mit der  $x$ - $z$ -Ebene ist  $z(x) = (a+x)x^2$ . Das ist ein sehr überschaubares Polynom 3. Grades mit Berührung im Ursprung und weiterer Nullstelle bei  $x = -a$ . Abb. 4.12 b) im Buch zeigt, dass das Maximum dann an der Stelle  $x = -\frac{2}{3}a$  liegen muss und damit die Ordinate  $z = \frac{4}{27}a^3$  hat. Für diesen Wert  $c = -\frac{4}{27}a^3$  hat die Raumverwandte einen isolierten Punkt in  $(-\frac{2}{3}a, 0)$  und einen Ast, der von rechts bis  $(\frac{a}{3}, 0)$  reicht. Für kleinere  $c$  gibt es nur noch einen leicht gebogenen Ast, für größere  $c$ , also wenn sich die Raumfläche hebt, gibt es für  $c < 0$  ein getrennt liegendes konkaves Kurvenstück, für  $c = 0$  die wirkliche Strophoide, für  $c > 0$  zunächst Kurven mit „Knäuf“. Bis  $c = 3$  (bei  $a = 2$ ) haben diese (nach Sicht) noch eine waagerechte Tangente. Für welches  $c$  passiert das genau? Die GeoGebra-Datei ist auf der Website.

**Zu 4.: Konchoide des Nikomedes 3D** In der Funktion  $z = z(x, y) = k^2y^2 - (x^2 + y^2)(y - a)^2$  mit  $k = 3$  und  $a = 2$  ist eine Schnittkurve mit der  $y$ - $z$ -Ebene gegeben durch  $z = z(0, y) = y^2(9 - (y - 2)^2)$ . Dieses Polynom 4. Grades hat ein Minimum im Ursprung. Die beiden Maxima lassen sich auch von Hand exakt berechnen, siehe Datei mit GeoGebra-CAS auf der Website. Es ergeben sich die im Text vor dieser Aufgabe genannten Werte. Datei afg5.6-4-koncho3D.ggb auf der Website.

Interessant ist, dass der Schnitt mit der Asymptotenebene  $y = a$  auf  $z = k^2a^2$  führt, die Raumverwandte in dieser Höhe besteht also aus einer exakten Geraden, deren Punkte die Gleichung erfüllen, und einem glockenförmigen Ast, der diese Gerade als Asymptote hat. In noch größerer Höhe wächst die Gerade mit diesem Ast zu einer geschlossenen Kurve zusammen. Das kann man sich mit  $k^2a^2 + \varepsilon = k^2y^2 - (x^2 + y^2)(y - a)^2$  für  $-50 < \varepsilon < 50$  sehr schön ansehen. Datei afg5.6-4-koncho3D-erg.ggb auf der Website.

**5.3.2 Raumflächen durch Rotation der Kurven****5.3.3 Produkte aus Kurven****5.3.4 Klein'sche Quartiken****5.3.5 Quadriken**

$$\vec{p}^T \cdot A \cdot \vec{p} + 2\vec{b} \cdot \vec{p} + c = 0$$

**5.3.6 Harmonie der rotierten Quadriken****5.3.7 Exotische Raumflächen**



# 6 Die unlösbaren Probleme der Antike

---

## Übersicht

6.1	Die Unlösbarkeit .....	75
6.2	Beliebige Winkel in n Teile teilen .....	75
6.3	Würfel verdoppeln, Delisches Problem .....	75
6.4	Die konstruierbaren n-Ecke .....	76
6.5	Kreis quadrieren .....	76
6.6	Zirkel, Lineal und Parabellineal .....	76
6.7	Archimedes und die Quadratur der Parabel .....	76

---

## 6.1 Die Unlösbarkeit

6.1.1 Winkeldritteler, Würfelverdoppler und Kreisquadrierer

6.1.2 Algebra und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

## 6.2 Beliebige Winkel in n Teile teilen

6.2.1 Winkel dritteln

6.2.2 Konstruierbare Winkel mit natürlichem Winkelgrad

6.2.3 Die Dreiteilung des Winkels mit der Konchoide

6.2.4 Die n-Teilung des Winkels mit der archimedischen Spirale

6.2.5 Winkeldritteln mit der Trisektrix und anderen Kurven

## 6.3 Würfel verdoppeln, Delisches Problem

## **6.4 Die konstruierbaren n-Ecke**

### **6.4.1 Das Siebeneck oder Heptagon**

### **6.4.2 Welche n-Ecke sind konstruierbar?**

## **6.5 Kreis quadrieren**

### **6.5.1 $\pi$ -Konstruktion als neuer Problemtypus**

### **6.5.2 Die Quadratrix**

### **6.5.3 Archimedes, Leonardo da Vinci und Weiteres**

## **6.6 Zirkel, Lineal und Parabellineal**

### **6.6.1 Gleichungen dritten Grades und Quasikonstruktionen**

### **6.6.2 Weitere exakte Konstruktionen mit Parabellineal**

## **6.7 Archimedes und die Quadratur der Parabel**

# 7 Kegelschnitte

---

## Übersicht

7.1	Kegelschnitte, die berühmteste Kurvenfamilie .....	77
7.2	Gemeinsame Konstruktionen .....	77
7.3	Beweise mit Dandelin'schen Kugeln .....	77
7.4	Namensgeheimnis der Kegelschnitte .....	78
7.5	Reflexion und Tangenten an Kegelschnitten .....	78
7.6	Anwendungen der Kegelschnitte .....	78
7.7	Extras und Aufgaben .....	78

---

## 7.1 Kegelschnitte, die berühmteste Kurvenfamilie

### 7.1.1 Allgemeine 2D-Quadrikgleichung

### 7.1.2 Fazit zu den Quadriken

## 7.2 Gemeinsame Konstruktionen

### 7.2.1 Faden-Konstruktionen

### 7.2.2 Leitgeraden-Konstruktion aller Kegelschnitte

### 7.2.3 Leitkreis-Konstruktion

## 7.3 Beweise mit Dandelin'schen Kugeln

### 7.3.1 Dandelin'sche Kugeln für die Ellipse

### 7.3.2 Dandelin'sche Kugel für die Parabel

### 7.3.3 Dandelin'sche Kugeln für die Hyperbel

#### 7.3.4 Ellipsensalami

### 7.4 Namensgeheimnis der Kegelschnitte

## 7.5 Reflexion und Tangenten an Kegelschnitten

#### 7.5.1 Tangenten, Leitkreis und Leitgerade

#### 7.5.2 Tangenten- und Normalengleichungen bei Kegelschnitten

#### 7.5.3 Reflexion an den Kegelschnitten

## 7.6 Anwendungen der Kegelschnitte

#### 7.6.1 Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Formen in unserer Welt

#### 7.6.2 Anwendungen, die die Reflexionseigenschaften nutzen

#### 7.6.3 Projektion der Kegelschnitte

## 7.7 Extras und Aufgaben

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 7.7.1 Krümmungskreise von Ellipse, Hyperbel und Parabel

### Aufgabe 7.1 Krümmungskreise der Hyperbel und der Parabel

a) Finden Sie entsprechend eine Krümmungskreis-Konstruktion für die Hyperbel. b) Für die Parabel ist es sinnvoll, zwei Fälle zu unterscheiden 1.) Wenn man den Parabelparameter  $p$  kennt (oder sich von GeoGebra den Brennpunkt zeigen lässt):  $p$  ist der Krümmungsradius im Scheitel. 2.) Für  $y = ax^2$  ist  $\frac{1}{2a}$  dieser Radius. Sehen Sie sich in Abb. ?? an, wie man Kehrwerte konstruiert.

Üben Sie sich darin, eine verständliche Konstruktionsbeschreibung zu verfassen. Diese Krümmungskonstruktionen eignen sich auch, um in großem Maßstab, z.B. auf einem Schulhof oder einer Wiese, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln zu realisieren. Dabei wird dann auch deutlich, dass der Krümmungsbegriff *zur Kurve* gehört und nicht vom Koordinatensystem abhängig ist.

#### Hinweis

Verwenden Sie  $-b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  bzw.  $y = \frac{1}{2p}x^2$  oder  $y = ax^2$ , damit Sie im Scheitel Steigung 0 haben. ◀

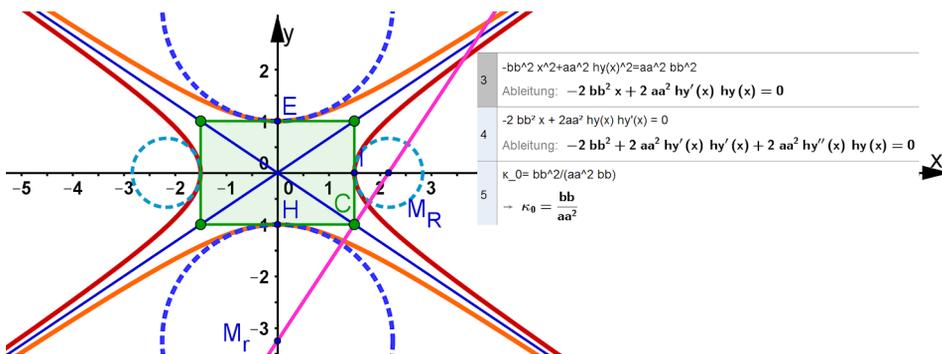


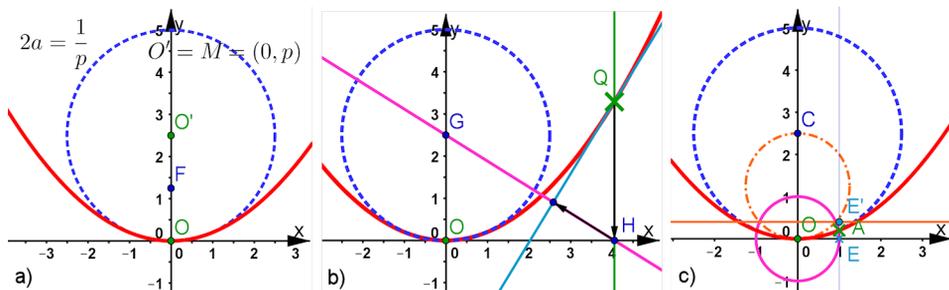
Abb. 7.1 Aufgabe 7.1 Scheitelkrümmungskreise: a) Hyperbel

**Lösung: Zu a) Hyperbel** Zeichne ein achsensymmetrisches Rechteck mit der Breite  $2a$  und der Höhe  $2b$  mit seinen Diagonalen. Sie sind die Asymptoten der beiden Hyperbeln. Errichte in einer Ecke des Rechtecks eine Senkrechte auf der Diagonalen. Sie schneidet die beiden Achsen in zwei Punkten  $M_r$  und  $M_R$ , die die Mittelpunkte der passenden Scheitelkrümmungskreise sind.

**Geometrisch:** Es gibt ähnliche rechtwinklige Dreiecke in Abb. 7.1 (hier). Bei  $M_r$  gilt  $\frac{r}{a} = \frac{a}{b}$ , also  $r = \frac{a^2}{b}$ . Entsprechend gilt bei  $M_R$  rechts  $\frac{R}{b} = \frac{b}{a}$ , also  $R = \frac{b^2}{a}$ .

**Rechnerisch:** Für  $r$  ist ein Stück aus GeoGebra-CAS ins Bild eingefügt. Dort stehen  $aa$  für  $a$  und  $bb$  für  $b$ , da  $a = 1.5$  und  $b = 1$  in derselben Datei durch Schieberegler belegte Werte sind. Man muss umbenennen, damit mit das CAS noch echte freie Parameter hat.

Es ist auch gezeigt, dass man mit einer nicht festgelegten Funktion  $hy(x)$  die impliziten Ableitungen problemlos bewältigt. Für die orangefarbene Hyperbel ist  $hy'(0) = 0$ , so dass  $r = \frac{1}{\kappa_0}$  ist. Das passt genau zu den geometrisch erzeugten Größen, also ist die Konstruktion richtig.



**Abb. 7.2** Aufgabe 7.1 b) Scheitelkrümmungskreis der Parabel a) Brennpunkt F, Ordinate verdoppeln, b) beliebiger Punkt Q auf der Parabel liefert mit dem Lot auf die Tangente den Mittelpunkt, c) Ordinate an der Stelle 1 verdoppeln, zugehörige Waagerechte am Einheitskreis spiegeln liefert den Mittelpunkt

**Zu b) Parabel** In Abb. 7.2 (hier) sind drei Arten vorgestellt, den Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises zu konstruieren.

Das **rechnerische Vorgehen** steht auch im CAS der GeoGebra-Datei:  $y = ax^2$ ,  $y' = 2ax$  und  $y'' = 2a$  ergibt an der Stelle  $x = 0$  die Krümmung  $\kappa_0 = 2a$ . Darum ist der Krümmungsradius  $r = \frac{1}{2a} = p$ .

**Bild a)** zeigt mit einem Brennpunkt, den man von GeoGebra anzeigen lässt, durch Verdoppelung der Ordinate schon gleich den Mittelpunkt.

**Bild b) nutzt die Geometrie der Parabel:** Von einem beliebigen Punkt  $Q$  der Parabel fällt man das Lot auf die  $x$ -Achse und vom Fußpunkt  $H$  das Lot auf die Tangente in  $Q$ . Diese erhält man als Verbindungsgerade von  $Q$  und der Mitte zwischen  $O$  und  $H$  (oder von GeoGebra als **Tangente**  $[Q, y=a x^2]$ ). Dieses Lot schneidet die  $y$ -Achse im gesuchten Mittelpunkt. Das kann man auf zwei Arten einsehen:

**Erstens:** Denkt man sich  $H$  um  $\frac{p}{2}$  tiefer, also auf der Leitgeraden, dann wird  $G$  zum Brennpunkt  $F$ , die Tangente ist Mittelsenkrechte auf  $\overline{FH}$  und alles ist richtig.

**Zweitens:** Mit  $Q = (u, au^2)$  hat die Tangente die Steigung  $2au$ ,  $H = (u, 0)$ , die violette Gerade ist  $y = -\frac{1}{2au}(x - u)$ . Sie schneidet die  $y$ -Achse mit der Ordinate  $y_0 = \frac{1}{2a} = p$ , genau wie wir es brauchen.

**Bild c) nutzt die Ordinate  $a$  an der Stelle  $x = 1$ :** Die verdoppelte Ordinate erzeugt die orangefarbene Gerade  $y = 2a$ , die am violetten Einheitskreis gespiegelt (Kreis Spiegelung, Inversion) wird. Damit hat Punkt  $C$  die Ordinate  $\frac{1}{2a} = p$ , wie wir es brauchen.

Die GeoGebra-Dateien sind auf der Website im Bereich 07 Kegelschnitte.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

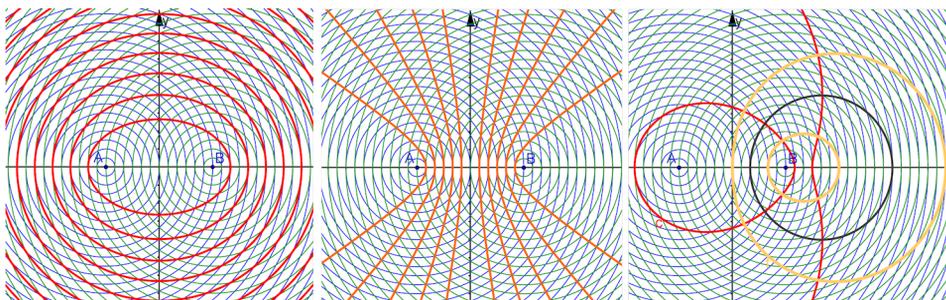
#### Aufgabe 7.2 Raster mit Kreis- und Parallelscharen

Eine \*.pdf-Seite mit den Rasterbildern für Ihre eigenen Eintragungen finden Sie auf der Website im Abschnitt 7.7.

- Überlegen Sie, dass Sie für Abb. 7.25 a) mit dem roten Strichtyp einen (blauen) Kreis nach außen, aber dafür einen (grünen) Kreis nach innen gehen. Die Summe der Kreisringe nach  $A$  und  $B$  bleibt also konstant. Überlegen Sie entsprechend für den blauen Strichvorschlag.
- Überlegen Sie, dass Sie für eine Parabel, für die die blaue Senkrechte Leitgerade sein soll, im Ursprung starten müssen. Erhalten Sie auch Parabeln, wenn Sie andere Diagonalenfamilien verfolgen?
- Bei dem grünen Zeichenvorschlag geht man immer *zwei* Senkrechten nach außen, aber nur *einen* Kreis. Welche Kurven entstehen?
- Bei dem blauen Zeichenvorschlag geht man immer *zwei* Kreise weiter, aber nur *eine* Senkrechte. Welche Kurven entstehen?
- Was passiert, wenn Sie diese beiden Methoden bei dem Doppelkreissystem anwenden?
- Stellen Sie für jeden Typ eine Gleichung auf. Prüfen Sie sie in GeoGebra.

#### Hinweis

Der GeoGebra-Befehl für z. B. das Kreissystem ist Folge[(x - e)^2 + y^2 = k^2, k, 0, 20, 0.5]. Wenn Sie die Raster selbst erzeugen, können Sie Kurvenvorschläge in GeoGebra direkt prüfen. Bedenken Sie die Abschnitte 7.2.1, 7.2.2 und für den letzten Top auch 4.3.2. Die Rasterbilder zum Ausdrucken und Lösungen sind auf der Website zum Buch. ◀



**Abb. 7.3 Aufgabe 7.2 Raster mit konzentrischen Kreisscharen**

Links: roter Zeichenvorschlag zu a), mitte: blauer Zeichenvorschlag zu a), rechts: Vorschläge von b) im Doppelkreissystem, siehe 5.

**Lösung: Zu 1.: Doppelkreissystem a)** Man sieht in Abb. 7.3 (hier) links die für konstante Abstandssumme zu erwartenden Ellipsen. Der blaue Strichvorschlag bei a) geht sowohl einen blauen Kreis nach außen als auch einen grünen. Also bleibt der Unterschied der Abstände von  $A$  und  $B$  konstant. Tatsächlich sieht man in der Mitte von Abb. 7.3 (hier) die Hyperbeln.

In der **Physik** nennt man sie auch „**Interferenz-Hyperbeln**“. Sie entstehen, wenn sich die Wellen zweier Schwingungserzeuger überlagern. Stellen Sie sich vor, dass die Kreise abwechselnd Täler und Berge von Kreiswellen bedeuten. Dann findet Verstärkung statt, wenn Tal auf Tal oder Berg auf Berg trifft, aber Auslöschung, wenn Tal auf Berg (oder umgekehrt) trifft. Dreht z. B. man eine angeschlagene Stimmgabel vor dem Ohr, so kann man dieses Interferenzphänomen als „Jaulen“ hören.

**Herleitung von Gleichungen** Wir verwenden die bei der Fadenkonstruktion Abschnitt 7.2.1 auf Seite 186 verwendeten Bezeichnungen. Nun aber ist  $A = F_1$  und  $B = F_2$ . Der Abstand von  $A$  sei also  $r$ , der von  $B$  sei  $r'$ .

Bei den Sätzen 7.1 und 7.2 auf den Seiten 186 f wird der Beweis für die Ellipsen- und Hyperbelgleichungen erbracht, wie wir ihn hier brauchen. Das Raster ist mit 1-Abständen gezeichnet. Dann haben die Ellipsen links die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , mit abgezählten  $a = 8$  und  $b^2 = a^2 - e^2 = 64 - 36 = 28$  für die innere Ellipse.

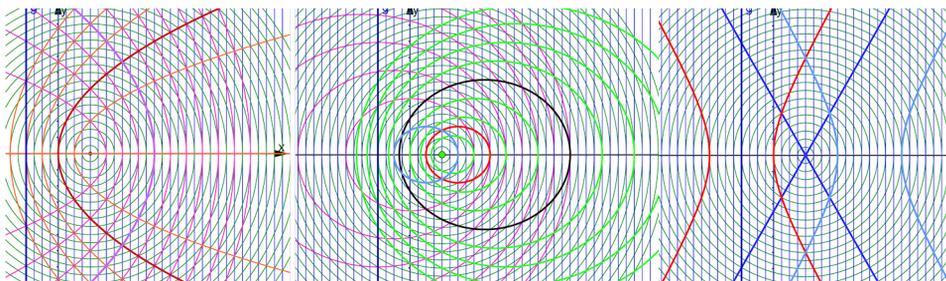
Die Hyperbel gekrümmteste Hyperbel hat die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  mit  $a = 5$  und  $b^2 = e^2 - a^2 = 36 - 25 = 11$ .

**Zu 5.: Strichvorschläge aus b) im Doppelkreissystem anwenden** Für das rote Oval in Abb. 7.3 (rechts) ist rechts neben  $B$  das  $r = 13$  und  $r' = 1$ . Der nächste Punkt nach dem blauen Strichvorschlag ist  $r = 12$  und  $r' = 3$ , dann  $r = 11$  und  $r' = 5$ . Hieraus ergibt sich eine lineare Gleichung  $r' = -2r + 27$ . Die beteiligten Kreise haben allgemein die Gleichungen  $(x+6)^2 + y^2 = r^2$  und  $(x-6)^2 + y^2 = (-2r+27)^2$ . Nun ist  $r$  zu eliminieren. Man bekommt eine Wurzel, die man durch isolieren und quadrieren beseitigen muss und erhält eine Kurve 4. Grades. Wegen der linearen Gleichung in  $r$  und  $r'$  handelt es sich i. A. um **Descartes'sche Ovale**, wie sie bei den bipolaren Kurven S. 99 und in Aufgabe 4.4 S. 107 erklärt sind.

Für die gelbe Descartes'sche Kurve ist  $r' = \frac{1}{2}r + 3$  und Mathematica liefert mit [www.wolfram-alpha.com](http://www.wolfram-alpha.com)  $x^4 + 2x^2(y^2 + 216) + y^2(y^2 + 32) = 8x(5x^2 + 5y^2 + 144)$ .

**Sind speziell  $r$  und  $r'$  proportional**, erhält man keine Wurzelgleichung, es bleibt beim 2. Grad und damit ist ein Kegelschnitt gesichert. Der schwarze Kreis ist so ein Fall mit  $r' = \frac{1}{2}r$  und sogar von Hand hat man bald:  $(x-10)^2 + y^2 = 64$ . Bei genauerem Hinsehen ist es bei Proportionalität von  $r$  und  $r'$  sogar **immer** ein Kreis, denn der  $x^2$ -Term und der  $y^2$ -Term bekommen in diesem Falle stets denselben Faktor  $1 - k^2$ .

**Zu 2.: Parallelen und Kreissystem, Parabeln** Beginnt man im Ursprung mit dem braunem Strichvorschlag, so entsteht die rote Parabel mit dem Scheitel im Ursprung. Das ist schon in Abschnitt 7.2.1 und Satz 7.5 auf Seite 187 bewiesen. Hierfür ist in Abb. 7.4 (links) die dicke blaue Parallele zur  $y$ -Achse die Leitgerade, denn die Scheitelgerade halbiert stets die Abstandsstrecke zwischen Brennpunkt und Leitgerade. Es ist klar, dass



**Abb. 7.4 Aufgabe 7.2 mit Parallelen und einer konzentrischen Kreisschar**

Links: Parabeln mit braunem und roten Strichvorschlag zu b), mitte: Ellipse mit grünem Strichvorschlag zu b), rechts: Hyperbeln mit blauem Strichvorschlag zu b), siehe dazu hier in der Lösung die Punkte 2, 3 und 4.

man mit anderen Startpunkten für den Scheitel ebenfalls Parabeln erhält, deren Leitgeraden man durch Spiegelung des Brennpunktes am Scheitel findet. Die nach links geöffneten Parabeln ergeben sich durch den roten Strichvorschlag bei b).

**Parallelen und Kreissystem, Gleichungen** Für die Herleitung der Gleichungen ist  $F = (f, 0)$ , der Radius der Kreise sein  $r$ . Die Parallelen zeigen direkt die Abszisse  $x$  des Schnittpunktes zwischen einer Parallelen und einem Kreis an. Die lineare Gleichung zwischen  $r$  und  $x$  sei  $r = kx + s$ . Dabei ergibt sich der Parameter  $k$  aus der Strichvorschrift, explizit sind in Abb. 7.25 (Buch) vorgeschlagen  $k = \pm 1$ ,  $k = \pm 2$ , wenn es für einen grünen Kreis zwei blaue Parallelen weitergeht,  $k = \pm \frac{1}{2}$ , wenn es für eine blaue Parallele zwei grüne Kreise weitergeht. Um  $s$  und  $k$  konkret zu finden, startet man irgendwo, notiert zwei Paare  $r$  und  $x$  und bestimmt die lineare Gleichung. Dann ist die Gleichung der Kurve

$$(x - f)^2 + y^2 = (kx + s)^2.$$

Dieses ist mit Sicherheit eine 2D-Quadrik nach Definition 7.1 Seite 183. Man kann sie direkt in GeoGebra eingeben. Stellt man die Gleichung um, so erhält man  $(1 - k^2)x^2 + y^2 + \dots$ , die Punkte stehen für einen linearen Term in  $x$ . Man erkennt daran für  $k^2 < 1$  Ellipsen, für  $k^2 = 1$  Parabeln und für  $k^2 > 1$  Hyperbeln.

**Zu 3.: Parallelen und Kreissystem, Ellipsen** Beginnt man irgendwo mit dem grünen Strichvorschlag, so erhält man die grünen Ellipsen in Abb. 7.4 (mitte), darunter die kleine rote und die schwarze Ellipse. Für letztere ist  $r = \frac{1}{2}x + 6$  die lineare Gleichung und die Ellipsengleichung ist  $\frac{3}{4}x^2 - 14x + y^2 = 20$ . Üben Sie sich in der Umwandlung in die verschobene Mittelpunktsform und prüfen Sie in GeoGebra. Wie erhält man die violetten Ellipsen?

**Zu 4.: Parallelen und Kreissystem, Hyperbeln** Mit dem blauen Strichvorschlag und dem Start im Ursprung kommt man auf die rote Hyperbel  $3x^2 + 24x - y^2 = 0$ . Beim Start im Brennpunkt erhält man das Geradenkreuz aus  $r = 2x - 8$  zu  $3(x - 4)^2 - y^2 = 0$ . Allgemein entsteht ein Geradenkreuz für  $s = -kf$ .

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 7.3 Konfokale Ellipsen und Hyperbeln

1. Setzen Sie zwei Punkte auf die Zeichenebene und erzeugen Sie mit den passenden Buttons eine Ellipse und eine Hyperbel und realisieren Sie eine „eindrucksvolle“ Bestätigung des Satzes: **Konfokale Ellipsen und konfokale Hyperbeln mit denselben Brennpunkten schneiden sich stets senkrecht.**
2. Es gilt für Ellipsen  $b^2 + e^2 = a^2$  und für Hyperbeln  $b^2 - e^2 = a^2$  nach den Sätzen 7.1 und 7.2. Am Ende von Abschnitt 7.2.1.1 steht schon ein Hinweis, diesen Zusammenhang konstruktiv zu verwerten. Tun Sie das einmal wirklich. Stellen Sie Gleichungen für eine Ellipsenschar und eine Hyperbelschar auf und zeichnen Sie diese mit dem im Hinweis genannten Befehl Folge[...]. Sind es orthogonale Scharen? Orthogonal heißt: senkrecht aufeinander stehend.
3. Sehen Sie sich die Zeichnungen zur Reflexion 7.12 an und finden Sie eine geometrische Begründung für die Orthogonalität der Tangenten.
4. Beweisen Sie mit Methoden der Analysis, dass die Tangenten senkrecht stehen.

#### Hinweis

Im Befehl Folge[ $x^2/(e^2 - k^2) + y^2/k^2 = 1$ ,  $k$ ,  $0, e$ ,  $0.5$ ] müssen Sie unbedingt  $e$  als Zahl festlegen, der Befehl verträgt keine weiteren Parameter, auch nicht, wenn sie „außen“ bekannt sind.

Der letzte Beweis geht „von Hand“, wenn man dasselbe  $b$  für Ellipse und Hyperbel wählt. Dann ist der Schnittpunkt  $(\frac{\sqrt{e^4 - b^4}}{e}, \frac{b^2}{e})$ . (Fehlerteufel: Im Buch ist das Wurzelziehen vergessen worden.) Weiteres finden Sie auf der Website zum Buch. ◀

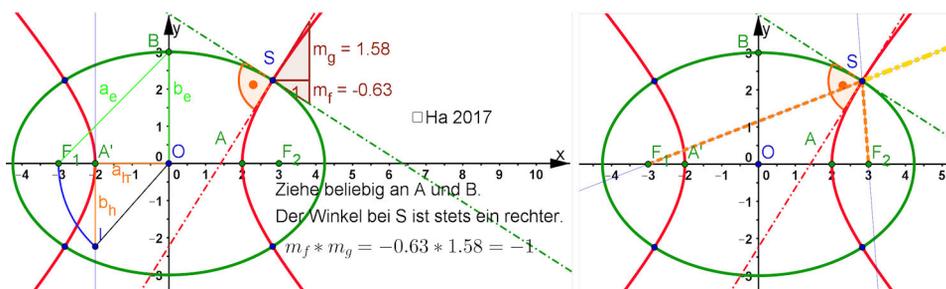


Abb. 7.5 Aufgabe 7.3 Konfokale Ellipsen und Hyperbeln

**Lösung: Zu 1. Orthogonalität ansehen** Konfokal=“mit gemeinsamem Fokus“ soll in dieser Aufgabe heißen, dass **beide Brennpunkte** zusammenfallen. In Abb. 7.5 (hier) wurden zuerst mit  $e = \overline{F_1 O}$  die beiden Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  festgelegt und dann mit

völlig frei in die Ebene gesetztem Punkt  $A$  mit dem Button „Hyperbel aus Brennpunkten und freiem Punkt“ eine Hyperbel erzeugt, ebenso ging es mit der Ellipse. Mit  $S$  und dem Befehl `Tangente[<Kegelschnitt>,S]` sind die Tangenten und ihr Schnittwinkel angezeigt. Umherziehen von  $A$  und  $B$  ändert nichts an dem Symbol für den rechten Winkel. Das ist durchaus eindrucksvoll. Mit dem Befehl `Steigung[<Gerade>]` findet man die Steigungen  $m_g$  und  $m_f$ , ihr Produkt ist in jeder Stellung  $-1$ , wie es für senkrechte Stellung sein muss.

**Zu 2. Beziehungen zwischen den Halbachsen und  $e$**  Mit dem Befehl

`HalbeHauptachsenlänge[ <Kegelschnitt> ]` findet man  $A_h$  und entsprechend  $B_e$ , im Bild unter der gezeigten Lage von  $A$  und  $B$  verborgen. Links sind hellgrün und orange die rechtwinkligen Dreiecke mit den geforderten Pythagoras-Beziehungen konstruiert. Die Datei finden Sie auf der Website.

Für die orthogonalen Scharen von Ellipsen und Hyperbeln gibt es bei der Lösung zu Aufgabe 7.2 die GeoGebra-Datei `afg7.2-kr-elli-hyp.ggb`.

**Zu 3. Zusammenhang mit Reflexion** In Abb. 7.5 (hier) sehen Sie rechts, dass die Tangenten wechselweise als Einfallslote für die an Ellipse und Hyperbel reflektierten Strahlen dienen. Geometrische Beweise zeigt Abschnitt 7.5.1.

**Zu 4. Analysis-Beweise** Grundsätzlich ist der Schnittpunkt zweier konfokaler Kegelschnitte zu bestimmen. Das sind dann stets Ellipse und Hyperbel, denn konfokale Ellipsen schneiden sich untereinander ebenso wenig wie konfokale Hyperbeln.

Parabeln kommen hier nicht in Spiel, da sie (im Endlichen) nur einen Brennpunkt haben. In der Lösung zu Aufgabe 7.2 können Sie zwei konfokale Parabelscharen mit gleicher Achse sehen, die sich orthogonal schneiden. Machen Sie sich vielleicht auf, das zu zeigen.

Das auf der Website befindliche Mathematica-Notebook `aufgabe7.2-konfokale-conics.nb`, das jeder als \*.pdf lesen kann, rechnet den allgemeinen Fall vollständig durch. Der dort verfolgte Trick, zunächst mit  $zx = x^2$  und  $zy = y^2$  zu arbeiten und erst zum Schluss die Wurzeln zu ziehen, bewährt sich.

Hier soll der **Sonderfall**, wie im Hinweis angeregt, betrachtet werden, dass die kleine Halbachse für Ellipse und Hyperbel gleich  $b$  ist. Nach den Pythagoras-Beziehungen aus 2. gilt für die Ellipse  $a_e^2 = e^2 + b^2$  und für die Hyperbel  $a_h^2 = e^2 - b^2$ . Wir suchen also einen Schnittpunkt von  $\frac{x^2}{e^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  und  $\frac{x^2}{e^2-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Addition der Gleichungen ergibt unter Verwendung der 3. binomischen Formel für den Hauptnenner  $\frac{2e^2}{e^4-b^4}x^2 = 2$ . So passt es zu dem (berichtigten) Hinweis. Es folgt  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{e^4-b^4}{e^2(e^2+b^2)} = 1 - \frac{e^2-b^2}{e^2} = \frac{b^2}{e^2}$ , also  $y^2 = \frac{b^4}{e^2}$ . (*Ach, könnte man doch die Wichtigkeit von Binomi 3 vermitteln!*)

Die implizite Ableitung der Ellipse ist  $-\frac{2x}{e^2+b^2} + \frac{2y y'_e}{b^2} = 0$ , was im Schnittpunkt  $y'_e = -\frac{2\sqrt{e^4-b^4}}{e(e^2-b^2)} \frac{e b^2}{2b^2} = \frac{\sqrt{e^4-b^4}}{e^2+b^2}$  zur Folge hat. Entsprechend ist  $y'_h = \frac{\sqrt{e^4-b^4}}{e^2-b^2}$  für die Steigung der Hyperbeltangente. Mit  $y'_e \cdot y'_h = \frac{\sqrt{e^4-b^4} \cdot \sqrt{e^4-b^4}}{(e^2+b^2)(e^2-b^2)} = -\frac{e^4-b^4}{e^4-b^4} = -1$  ist nun der Schnittwinkel als rechter Winkel gesichert.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

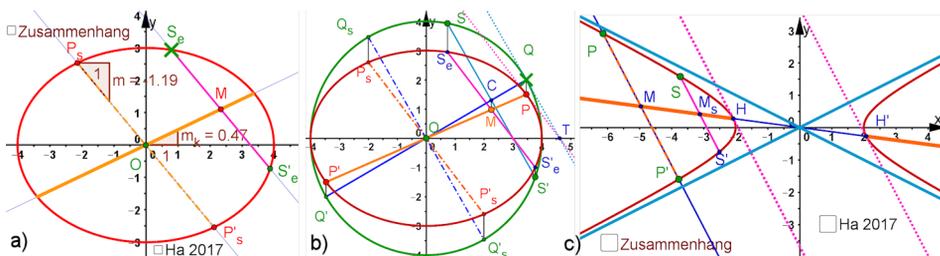
#### Aufgabe 7.4 Konjugierte Richtungen

1. Zeichnen Sie eine Ellipse und eine Schar paralleler Geraden, die die Ellipse schneiden. Heben Sie die so entstehenden Sehnen als Strecken hervor, verbergen Sie die Geraden. Welche Eigenschaft hat die besondere Sehne *durch alle Mittelpunkte* dieser Sehnenchar? Die besondere Sehne ist ein **Durchmesser der Ellipse**. Passend zu Ihrer ursprünglichen Sehnenchar gibt es einen weiteren Durchmesser, diese beiden heißen **konjugierte Durchmesser**.
2. Die Tangenten an den Enden der konjugierten Durchmesser sind parallel zu dem jeweils anderen Durchmesser.
3. Sehen Sie sich Abb. 4.9 Seite 90 an, dann *verstehen* Sie, dass die konjugierten Durchmesser, die gemittelten Sehnen und die Tangenten aus einem beliebig gelegenen orthogonalen Durchmesserkreuz des Hauptscheitelkreises durch Stauchung hervorgehen. Dieser Zusammenhang wird übrigens meist als Definition für konjugierte Durchmesser genommen. Obiger Zugang ermöglicht für Sie eine *Erkundung*.
4. Wenn Sie die Handlungen von Top 1 für Hyperbeln durchführen, so finden Sie *einen* Durchmesser, aber *keinen zweiten*. Erkunden Sie, in welchem Bereich für Steigungen es Sehnen gibt. Welche Steigungen haben die zur Sehnenrichtung konjugierten Durchmesser? Wie können Sie Top 2 modifizieren?
5. Bei Parabeln liegen die Mittelpunkte einer Schar paralleler Sehnen auf einer Geraden. Sehen Sie sich das in GeoGebra an. Welche besondere Eigenschaft hat diese Gerade? Gibt es eine Erkenntnis zu Tangenten? Welcher Zusammenhang besteht mit der Abb. 7.14 Seite 201 oder mit der Parabelausschöpfung von Archimedes in Abschnitt 6.7
6. Im genannten Abschnitt wird die Begründung des Apollonius erwähnt, der direkt mit Hilfe der Schnitte mit dem Kegel argumentierte. Können Sie sich das vorstellen?

#### Hinweis

Diese Aufgabe lässt viel Raum zum Erkunden und ist auch für jüngere oder unerfahrene Lernende geeignet. ◀

**Lösung: Zu 1.: Erkundung** Abb. 7.6 a) zeigt eine Umsetzung der Aufgabenstellung, bei der man an  $S_e$  zieht und die Spur des Mittelpunktes der violetten Sehne ansieht. Sie ist ein Durchmesser und orangefarben dick hervorgehoben. Unter den violetten Sehnen gibt es eine, die auch Durchmesser ist, die beiden heißen **konjugierte Durchmesser**. Wenn man die Sehnen mit einbezieht, spricht man von **konjugierten Richtungen**. Das Produkt der beiden Steigungen  $m$  und  $m_k$  erfüllt die Gleichung  $m \cdot m_k = -\frac{b^2}{a^2}$ . Ein Beweis dafür folgt am Ende von 3.



**Abb. 7.6 Aufgabe 7.4 Konjugierte Richtungen** a) Zu 1.: Erkundungsaufgabe, b) Beweise mit der Stauchung aus dem Hauptscheitelkreis, c) Zu 4.: Hyperbel und konjugierte Richtungen

**Zu 2. und 3.: Stauchung aus dem Hauptscheitelkreis** In Abb. 4.9 auf Seite 90 ist gezeigt, dass man die Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  durch Stauchung (Achsensteckung parallel zur Nebenscheitelachse) mit dem Stauchfaktor  $k = \frac{b}{a}$  aus dem Hauptscheitelkreis mit dem Radius  $a$  erhalten kann. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 7.6 b) dargestellt und liefert eine vollständige Begründung für die Beobachtungen:

Ein beliebiges rechtwinkliges Durchmesserkreuz (blau) des Hauptscheitelkreises ergibt ein i. A. nicht mehr rechtwinkliges Durchmesserkreuz (orange) der Ellipse. Alle zu den blauen Kreisdurchmessern parallelen Kreissehnen haben ihre Mittelpunkte auf den Kreisdurchmessern, das ist klar. Werden die Kreissehnen nun gestaucht, so bleiben die Mittelpunkte weiterhin Mittelpunkte, weil Stauchungen **teilverhältnistreu** sind. Diese Bildmittelpunkte liegen auf sowohl auf den Bildsehnen als auch auf den konjugierten Durchmessern der Ellipse. Damit ist die Beobachtung aus 1. bewiesen.

**In 2. geht es um die Tangenten:** Für den Kreis ist klar, dass die Tangenten senkrecht auf dem Radius stehen, die gestauchten Tangenten (violett gepunktet) haben mit der zugehörigen Kreistangente (hellblau gepunktet) den Durchgang  $T$  durch die Hauptachse gemeinsam. Diese Tangentenkonstruktion ist schon in Abb. 7.13 auf Seite 200 gezeigt. (Sie war ein Thema in meiner eigenen Abiturarbeit 1966.) Da Stauchungen auch **parallellentreu** sind, sie sind affine Abbildungen, ist diese Tangente auch parallel zu den violetten Sehnen.

**Beweis der Steigungsformel für konjugierte Richtungen:** Sei  $m$  die Steigung des Durchmessers  $\overline{P_s P'_s}$ . Die Frage, welcher Ellipsenpunkt gerade dieses  $m$  als Tangentensteigung hat, wird mit der impliziten Ableitung  $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot m}{b^2}$  beantwortet. Es folgt für die konjugierte Steigung  $m_k := \frac{y}{x} = -\frac{b^2}{m a^2}$ , also  $m \cdot m_k = -\frac{b^2}{a^2}$ . Das passt zu der Formel für senkrechte Steigungen  $m \cdot m_{senk} = -1$ , denn für  $a = b$  hat man als spezielle Ellipse einen Kreis und ein rechtwinkliges Durchmesserkreuz.

**Zu 4.: Konjugierte Richtungen bei Hyperbeln** Abb. 7.6 c) zeigt das dem Bild a) entsprechende Vorgehen. Die durch  $M$  und  $M_s$  definierte Gerade trifft den Ursprung und die Strecke  $\overline{H H'}$  kann man als Durchmesser auffassen. Daher spricht man bei Hyperbeln besser von **konjugierten Richtungen**. Die Tangenten – und damit die Sehnen – sind offensichtlich stets steiler als die Asymptoten der Hyperbel, die dazu konjugierten Richtungen sind stets flacher als die Asymptoten.

Probieren Sie aus, welche Ortskurve die Mitten von Sehnen haben, die einen Ast mit dem anderen verbinden.

Als **Steigungsformel für konjugierte Richtungen** kann auf gleiche Art hergeleitet werden:  $m \cdot m_k = \frac{b^2}{a^2}$ .

**Zu 5.: Parabeln** In Abb. 7.14 auf Seite 201 wird mit der Scherung begründet, dass es zu einer beliebigen Parabelsehne stets eine zur ihr parallele Tangente gibt, deren Berührungspunkt man findet, wenn man eine Parallele zur Parabelachse durch den Mittelpunkt der Parabelsehne mit der Parabel schneidet. In der Sprechweise dieser Aufgabe ist die konjugierte Richtung zu **jeder** Schar paralleler Sehnen eine Parallele zur Parabelachse. Dies sagt auch der obere blaue Kasten auf Seite 200. Unter ihm steht auch ein einfacher analytischer Beweis.

**Zu 6.: Diese Erkenntnisse sind sehr alt.** Die Parabel-Ausschöpfung des Archimedes (240 v. Chr), wie sie in Abb. 6.12 auf Seite 180 im Buch gezeigt ist, beruht auf diesem Erkenntnis. Der nur wenige Jahre jüngere Apollonius stellt sich die Sehnen und ihre Mittenverbindung schon beim Schneiden des Kegels vor.

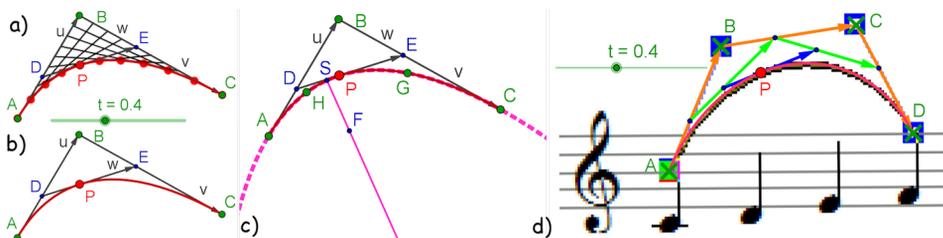
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 7.5 Parabel als Vorstufe zu Bézierkurven

Ein faszinierendes Gebiet ist das „Design“ von Kurven aus wenigen Vorgaben. In meinem



**Abb. 7.7** Das Prinzip der Bézier-Kurven, a)-c) in einer Vorstufe, d) in der „echten“ Form.

Buch „Mathematik sehen und Verstehen“ sind in Abschnitt 9.2.4 die Bézier-Splines vorgestellt, deren Anwendung bei einem Bogen über Noten hier nochmals in Abb. 7.7 d) (hier) gezeigt ist. Für dieses Konzept zeige ich Ihnen nun eine Vorstufe, die zu Parabeln führt.

**Ziel:** Zu beliebigen drei Punkten  $A, B, C$  ist eine Parabel gesucht, die sich in der in Abb. 7.7 b) (hier) gezeigten Weise in das Dreieck  $A, B, C$  einschmiegt.

**Vorgehensweise:** Definieren Sie einen Parameter  $t$  als Schieberegler für den Bereich  $[0, 1]$ . Zeichnen Sie die Punkte und die Strecken  $u, v$  und Kreise mit den Radien  $t u$  bzw.  $t v$ . Wenn Sie dann die Strecke  $d = \overline{DE}$  haben, liefert der Kreis um  $D$  mit Radius  $t d$  den gesuchten Punkt  $P$ . Die Ortslinie von  $P$  ist schon die Lösung.

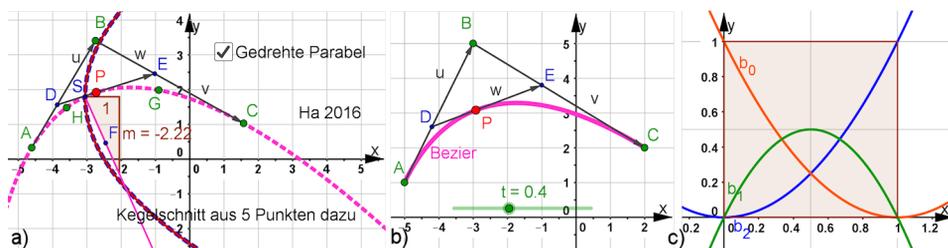
**Weiterführung:** Abb. 7.7 a) (hier) zeigt mit dem Spurmodus zehn Stellungen von  $P$ . Setzen Sie nun zwei zugfeste Punkte  $H, G$  auf die Ortslinie und wählen Sie den Button „Kegelschnitt durch 5 Punkte“. GeoGebra zeigt dann die violett gestrichelte Linie. Die Theorie, die Sie weiter unten evt. selbst bewältigen, sagt, dass es eine Parabel ist. An der gezeigten Gleichung können Sie das nicht sehen, da die Parabel i. d. R. nicht achsenparallel liegt. Aber wenn Sie als Befehle **Brennpunkt**[...] und **Scheitel**[...] wählen, können Sie eine Achse einzeichnen. Letzte Sicherheit, dass es wirklich keine Ellipse oder Hyperbel ist, können Sie bekommen, wenn Sie die Achse der Figur in eine zu einer Koordinatenachse parallele Lage bringen und dann die bekannte Parabelgleichung sehen. Bestimmen Sie den Drehwinkel aus der Steigung und lassen Sie GeoGebra die Drehung ausführen. Skeptiker des handwerklichen Vorgehens sollten beachten, dass das Ergebnis „gedanklich“ exakt ist. Rundungsfehler des Systems werden nicht zu beobachten sein.

**Rechnerische Bewältigung:** Elegant ist eine vektorielle Behandlung, wie ich sie für die eigentlichen Bézier-Splines schon auf meiner Site [?] vorgeschlagen habe und Ihnen auch auf der Website zu diesem Buch zur Verfügung stelle. Wenn Sie den Weg übertragen, gelangen Sie zu der Parameterdarstellung der **Bézier-Parabel**

$$x(t) = (1-t)^2 A_x + 2t(1-t) B_x + t^2 C_x, \quad y(t) = (1-t)^2 A_y + 2t(1-t) B_y + t^2 C_y. \quad (7.1)$$

Die Faktoren vor den Koordinaten der Steuerpunkte müsste man **Bernsteinpolynome 2. Grades** nennen. Wie immer sind die Dateien für den 2D- und den 3D-Fall auf der Website zum Buch.

**Lösung:** Die GeoGebra-Dateien zu b) und c) sind auf der Website. a) zeigt den Spurmodus aus der Datei zu b). Bewegen Sie die Steuerpunkte *wirklich!*



**Abb. 7.8 Bézier-Parabeln** a) Weiterführung mit Drehen der Bézier-Parabel, b) Schnelle Berechnung der Bezier-Parabel als Parameterkurve mit den Bernstein-Polynomen nach den Formeln unten, c) Bernstein-Polynome 2.Grades

**Weiterführung** Die Beschreibung in der Aufgabe führt zu Abb. 7.8a). Die Steigung  $m = \tan(\alpha)$  ergibt  $\alpha$  im Bogenmaß. Damit kommt GeoGebra direkt zurecht, allerdings ist hier  $S$  mit dem Winkel  $(-\alpha)$  gedreht. Im Gegensatz zur Behauptung im Buch ergibt sich aus den numerischen Ungenauigkeiten evt. doch noch der kleine Term  $0.01x^2$ , obwohl theoretisch eine Parabel gesichert ist. Aber wenn man an den nachträglich auf die Ortskurve gesetzten Punkten  $H$  oder  $G$  etwas zieht, gibt es Stellungen mit  $0x^2$ . Da die Ortskurve von GeoGebra selbst ein Spline ist, kommt es zu Abweichungen von der *wahren* Kurve. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit liegen die dick blau gestrichelte Kurve, die wirklich gedreht ist, und die rote Parabel, bei der etwa ein  $0.01x^2$  einfach weggelassen wurde, aufeinander.

**Rechnerische Bewältigung** Im Folgenden seien  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{C}$  die Ortsvektoren der drei Steuerpunkte, die man sich mit Koordinaten gegeben denkt. Wie üblich sind  $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$  u. s. w. Der Parameter  $t$  laufe von 0 bis 1. Dann gilt  $\vec{D} = \vec{A} + t\vec{AB} = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$  und  $\vec{E} = \vec{B} + t\vec{BC} = \vec{B} + t(\vec{C} - \vec{B})$  und schließlich  $\vec{P} = \vec{D} + t\vec{DE} = \vec{D} + t(\vec{E} - \vec{D}) = \vec{A} + t\vec{B} - t\vec{A} + t\vec{B} + t^2\vec{C} - t^2\vec{B} - t\vec{A} - t^2\vec{B} + t^2\vec{A}$ . Wenn wir dieses nach den Steuerpunkten sortieren, erhalten wir  $\vec{P} = (1 - t^2)\vec{A} + 2t(1 - t)\vec{B} + t^2\vec{C}$ . Dabei heißen die drei Polynome  $b_0(t) = (1 - t)^2$ ,  $b_1(t) = 2t(1 - t)$  und  $b_2(t) = t^2$  Bernsteinpolynome 2. Grades, nach dem russischen Mathematiker Sergei N. Bernstein, der sie 1911 vorstellte. Lesen Sie Wikipedia: Bernsteinpolynom. Unter Verwendung der (gegebenen) Koordinaten  $A_x, B_x, \dots$  der Steuerpunkte ist diese Vektorgleichung eine sehr griffige Parameterdarstellung der Bézierkurve, wie auch die Datei `bezier-bernstein.ggb` zeigt.

$$P_x = A_x b_0(t) + B_x b_1(t) + C_x b_2(t)$$

$$P_y = A_y b_0(t) + B_y b_1(t) + C_y b_2(t)$$

Elimination von  $t$  mit Mathematica für Abb. 7.8 b) und Drehung mit GeoGebra bringt:

$$c : 49x^2 + 42xy + 9y^2 + 32x + 400y = 1264 \quad c' : 58y^2 - 351.17y = 355.05x + 551.75.$$

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 7.6 Pol und Polare für die Parabel

Von einem **Pol**  $A$  aus legt man Tangenten an einen Kegelschnitt  $c$ . Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte heißt **Polare von  $A$  bezüglich  $c$** . Umgekehrt kann man jede Gerade, die den Kegelschnitt schneidet, **als Polare auffassen** und den zugehörigen **Pol suchen**.

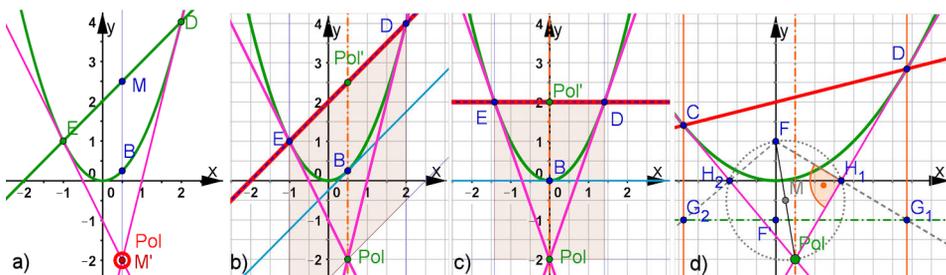
Konstruieren Sie für eine Parabel zu einem Pol die Polare und zu einer Polaren den Pol. Diese Konstruktionsaufgaben können Sie sich auch für die Ellipse und die Hyperbel stellen.

#### Hinweis

Bei der **Inversion am Kreis**, der Abschnitt 9.5 gewidmet ist, beantwortet Abb. 9,17 b) die erste Aufgabe, Abb. 9.17 a) die zweite. Lassen Sie sich davon anregen. Der rechte Winkel tritt bei der Parabel zwischen Brennpunkt, einem Punkt der Scheiteltangente und dem Berührungspunkt auf, siehe Abb. 7.12 b). Auch hier ist der Thaleskreis nützlich. Auf der Website zum Buch finden Sie die GeoGebra-Dateien. Wählen Sie mit der rechten Maustaste „Navigationsleiste“. Dann können Sie genau verfolgen, wie konstruiert wurde.



**Lösung:** Diese Aufgabe ist als **geometrische Herausforderung** gedacht. Zu einem Kegelschnitt  $c$  und einem  $Pol$  liefert GeoGebra nämlich mit dem Befehl `Polare[Pol, c]` **sofort die Polare**, und mit `Polare[g, c]` für eine Gerade  $g$ , die den Kegelschnitt  $c$  schneidet, **sofort den Pol**. Das gilt für Parabel, Ellipse und Hyperbel. Spannend und lehrreich ist aber, dass der Polare-Pol-Zusammenhang als Verallgemeinerung des Tangente-Berührungspunkt-Zusammenhangs aufgefasst werden kann. Das wird auch in Abb. 7.9 deutlich wenn man sich vorstellt, der Pol rückt immer näher an die Kurve heran. Dann ginge die Polare in die Tangente über.



**Abb. 7.9** Aufgabe 7.6 Parabeln mit Polare-Pol-Paaren a) Polare gegeben, Pol konstruiert, mit eingebautem Befehl für die roten Kreis, b), c), d) anderes herum, Erklärungen sind im Text. d) ist vollständig konstruiert, ohne Anleihen an der Fähigkeiten von GeoGebra.

**Die Beziehung: Pol-Sehnenmitte** Im Buch ist Abb. 7.14 auf Seite 201 auf die Sche- rung verwiesen, mit der man schräge Tangenten in Scheiteltangenten überführen kann. Hier ist in Abb. 7.9 c) in gerader Lage selbstverständlich, dass der Pol an  $B$  gespiegelt werden kann und die Polare parallel zur Scheiteltangente ist. In b) ist  $B$  der Berühr- punkt einer Tangente geworden und der an  $B$  gespiegelte Punkt  $Pol'$  definiert mit der Tangentenrichtung die Polare.

**Die Konstruktionen** In a) war die Polare schon gegeben, man musste also nur die Sehnenmitte  $M$  an  $B$  spiegeln, um den Pol zu finden. Dabei ist  $B$  der Schnitt der Para- bel mit der orangefarbenen Parallelen zur Parabelachse. Die Tangente in  $B$  wurde mit **Tangente**[B, c] erzeugt.

In c), in der die Parabel die Gleichung  $y = \frac{1}{2p}x^2$  hat, wurde nun auch diese Tan- gentenrichtung durch reine Konstruktion gefunden. So ähnlich ist die Konstellation im Buch in Abb. 7.12 auf Seite 198 zu sehen. Der Thaleskreis sorgt für  $H_1$  und den rechten Winkel dort. Dann ergibt sich  $G_1$  auf der Leitgeraden. Die Mittelsenkrechte auf  $\overline{FG_1}$  ist Tangente und der Berührpunkt ist ihr Schnitt mit eine Achsenparallelen durch  $G_1$ . Ebenso findet man auf der anderen Seite Tangente und Berührpunkt. Die Gerade durch die beiden Berührpunkte ist die gesuchte Polare.

**Gleichungen für Polaren** In Formel 7.9 im Buch Seite 201 ist für  $P_0 = (x_0, y_0)$  als Berührpunkt die **Tangentengleichung**  $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 x}{b^2=1}$  hergeleitet. **Dieselbe Gleichung** ergibt die Polare, wenn  $P_0$  nicht auf dem Kegelschnitt liegt, + gilt für Ellipsen – für Hyperbeln.

Für Parabel  $y = \frac{1}{2p}x^2$  leiten wir für den Pol  $P_0 = (x_0, y_0)$  die Polarengleichung direkt her:  $B$  hat die Abszisse  $x_0$  und die Ordinate  $\frac{x_0^2}{2p}$ . Spiegeln wir  $P_0$  an  $B$ , dann entsteht  $P'_0 = \left(x_0, 2 \cdot \frac{x_0^2}{2p} - y_0\right)$ . Die Steigung in  $B$  ist  $\frac{x_0}{p}$ . Damit ist die zur Tangente in  $B$  parallele Gerade durch  $P'_0$  nun  $y = \frac{x_0}{p}(x - x_0) + 2 \cdot \frac{x_0^2}{2p} - y_0 = \frac{x_0 x}{p} - y_0$ , zwei Terme heben sich weg.

Die **Polarengleichung für die Parabel** ist also  $y + y_0 = \frac{x_0 x}{p}$  und das ist zugleich die Tangentengleichung, falls  $P_0$  auf der Parabel liegt.

Bemerkenswerterweise gibt es auch diese Weise auch Polaren, die den Kegelschnitt gar nicht schneiden. Die Gleichungsauffassung erweitert also das ursprünglich geometrische Konzept.

**Blick auf die Inversion am Kreis** Im Abschnitt 9.5 ist in Abb. 9.17 gezeigt, dass man mit Pol und Polare am Inversionskreis die Kreisspiegelbilder konstruieren kann.

**Erfindung von Spiegelung an beliebigen Kegelschnitten** Für eine „Parabelspiegelung“ müsste das  $P'_0$  das Spiegelbild sein. Bei Ellipse und Hyperbel ergibt sich ein Zusammen- hang zu den konjugierten Durchmessern der vorigen Aufgabe. Jedenfalls ist es bestimmt interessant, diese Verallgemeinerungen der Kreisspiegelung zu untersuchen.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

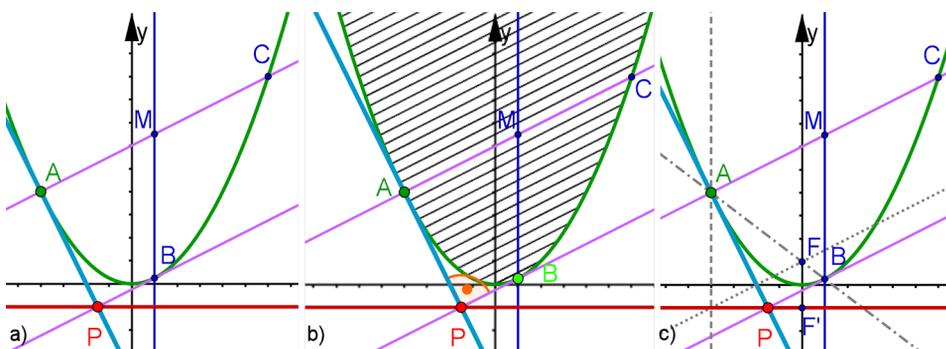
#### Aufgabe 7.7 Die orthoptische Kurve zur Parabel

Es sei eine Kurve  $c$  gegeben, auf ihr ein Punkt  $A$  mit Tangente. Konstruieren Sie einen Punkt  $B$  auf der Kurve  $c$  so, dass die Tangente in  $B$  die Tangente in  $A$  senkrecht schneidet. Der geometrische Ort des Tangentenschnittpunktes  $P$ , wenn  $A$  auf der Kurve wandert, heißt die **orthoptische Kurve zur Ausgangskurve**. Von allen Punkten dieser Kurve „sieht“ (*οπτική optikḗ*) man die Parabel unter einem rechten Winkel. Griechisch *ορθός*, *orthos*, heißt senkrecht.

Konstruieren Sie die orthoptische Kurve der Parabel.

#### Hinweis

Bedenken Sie, dass die Sehnen, die auf der Tangente durch  $A$  senkrecht stehen, die gesuchte Tangente schon festlegen. Sie können sich das Ergebnis in Wikipedia bei „Parabel“ ansehen und natürlich auf der Website zum Buch. ◀



**Abb. 7.10 Aufgabe 7.7 Orthoptische Kurve zur Parabel**

a) Konstruktion mit der Normalen, b) Zusammenhang mit den konjugierten Durchmessern, c) Begründung mit den geometrischen Parabeleigenschaften und dem Brennpunkt  $F$

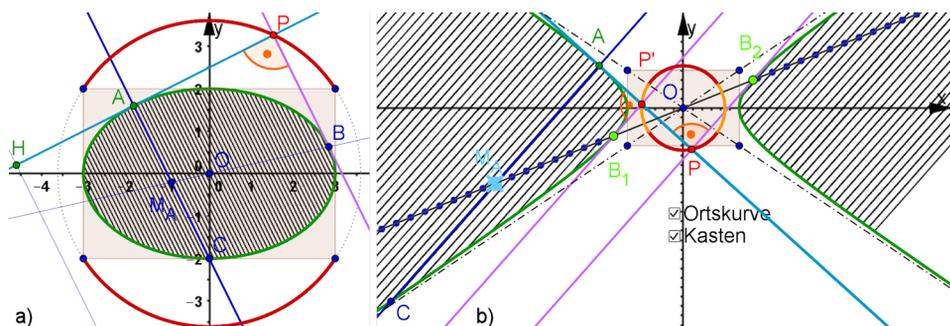
**Lösung und zusätzliche Betrachtungen** Über die gestellte Aufgabe zur **Parabeln** hinaus werden im Folgenden auch die **orthoptischen Kurven zu Ellipsen und Hyperbeln** konstruiert.

Bemerkenswert ist, dass stets in gleicher Weise die Eigenschaft der **konjugierten Durchmesser** ausgenutzt wird. Zu der gegebenen Tangente wird durch die Normale eine Sehne erzeugt, deren Mittelpunkt mit dem Zentrum  $O$  verbunden wird. Dieser konjugierte Durchmesser schneidet den Kegelschnitt in dem gesuchten Punkt  $B$ . Die Tangente in  $B$  ist parallel zur Sehnenchar und daher orthogonal zur gegebenen Tangente in  $A$ . Der Schnittpunkt  $P$  der beiden Tangenten ist der gesuchte Punkt der Ortskurve.

**Parabel** Bei der Parabel gibt es keinen eigentlichen Mittelpunkt. Der zweite Brennpunkt ist im Unendlichen, darum liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer Parallelen

zur Parabelachse, Abb. 7.10 b) (hier). Damit sind  $B$  und dann auch  $P$  richtig konstruiert, siehe Abb. 7.10 a) (hier). Zeichnet man die Ortskurve von  $P$ , so ist sie eine Parallele zur Scheiteltangente der Parabel, also zur  $x$ -Achse. Kurze Überlegung mit Abb. 7.10 c) (hier) zeigt, dass es sich um die Leitgerade der Parabel handelt.

Letzteres zeigt natürlich auch die **rechnerische Herleitung**: Parabel  $y = \frac{1}{2p}x^2$ ,  $A = (u, v)$ ,  $B = (s, t)$ , Tangenten in  $A$ :  $y = \frac{u}{p}(x-u) + \frac{v^2}{2p}$ , in  $B$ :  $y = \frac{s}{p}(x-s) + \frac{t^2}{2p}$ , Bedingung für senkrecht:  $\frac{s}{p} = -\frac{v}{u}$ . Tangentenschnitt ergibt mit der 3. binomischen Formel  $x = \frac{1}{2}(u + s)$ , was man ja auch in Abb. 7.10 c) (hier) sieht. Beides in die Tangentengleichung für  $A$  eingesetzt ergibt  $y = \frac{u}{p} \frac{1}{2}(-\frac{v^2}{u} + u) - \frac{u^2}{2p} = -\frac{v}{2}$ , die Gleichung der Leitgeraden.



**Abb. 7.11 Aufgabe 7.7 Orthoptische Kurven zu Ellipsen und Hyperbeln**

a) Die Normale definiert eine Sehenschar, deren kongugierter Durchmesser den Punkt  $B$  liefert. Die orthoptische Kurve der Ellipse besteht aus zwei Kreisbögen, b) ebenso erhält man mit der Geraden durch die Sehenmittelpunkte und den Ursprung nun zwei Punkte  $B_1$  und  $B_2$  auf den beiden Ästen. Die Schnittpunkte der Tangenten zu  $A$  und  $B_1$  beziehen sich auf den Ast von  $A$ , die von  $A$  und  $B_2$  auf verschiedene Äste. Die orthoptische Kurve der Hyperbel besteht aus je zwei Kreisbögen, die sich zu einem Kreis ergänzen.

**Ellipse** Das eingangs beschriebene Vorgehen passt zu Abb. 7.11 a) und konstruiert  $B$  und  $P$ . Dabei sind die Ecken des umbeschriebenen Rechtecks sichere Punkte der Ortskurve von  $P$ . Die Ortskurve ist für die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  anscheinend ein Kreis mit dem Radius  $a^2 + b^2$ , der ersichtlich nur im Intervall  $[-a, a]$  definiert ist.

Die rechnerische Bestimmung ist wegen der Quadrate sperrig und überfordert Mathematica sogar im konkreten Fall.

**Hyperbel** Das eingangs beschriebene Vorgehen passt zu Abb. 7.11 b) und konstruiert  $B$  und  $P$ . Die Ortskurve ist für die Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  anscheinend ein Kreis mit dem Radius  $a^2 - b^2$ , der ersichtlich aus zwei Bogenpaaren besteht. In dem Bereich zwischen den Asymptoten (Gleichung  $y = \pm \frac{b}{a}x$ ), in dem auch die Hyperbeläste liegen, gehen von  $P$  auf dem orangefarbenen Kreisbogen aus zwei Tangenten an denselben Ast. Auf den Asymptoten kann  $P$  nicht liegen. Von dem anderen Bereich gehen von  $P$  auf dem roten Kreisbogen aus die Tangenten an verschiedene Äste. Der Kreis ist, wenn er den zu erwartenden Radius  $a^2 - b^2$  hat, der Thaleskreis über der Brennpunktstrecke der korrespondierenden Ellipse.

Die rechnerische Bestimmung ist wegen der Quadrate sperrig und überfordert Mathematica sogar im konkreten Fall.

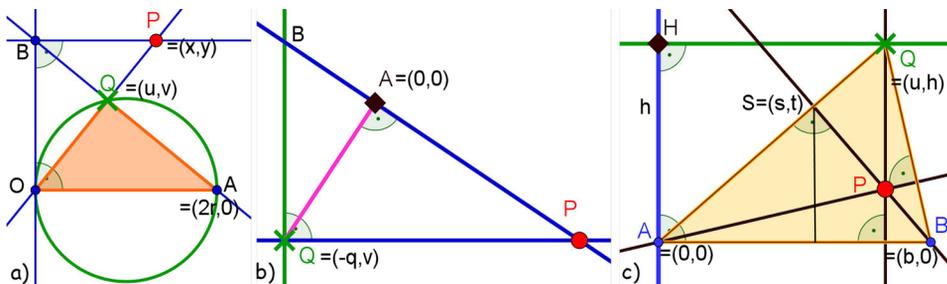
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 7.8 Elementare Ortsaufgaben

Die Konstruktionen sprechen eigentlich für sich. Bei Abb. 7.12 b) (hier) ist  $A$  ein *fester*



**Abb. 7.12 Orte erkunden**, stets wandert Punkt  $Q$  zugfest auf seinem grünen Weg, auf die gezeigte Weise entsteht Punkt  $P$ , dessen Ortslinie gesucht ist.

Punkt. In Abb. 7.12 c) (hier) ist  $P$  der Schnittpunkt der Höhen. Sehen Sie sich die Ortskurve von  $P$  an, wenn  $Q$  auf der waagerechten Geraden wandert. Variieren Sie auch die Höhenlage von  $H$ . Experimentieren Sie mit anderen besonderen Punkten im Dreieck, z. B. den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden. (Diese Aufgaben-Idee habe ich zuerst bei [Weth 1993], später bei [Weigand und Weth 2002] gefunden.

Bauen Sie die Konstruktionen nach. Stellen Sie, wenn Sie mögen, Gleichungen der Ortskurven auf. Probieren Sie weitere Varianten aus. **Die Kegelschnitte sind eine unerschöpfliche Quelle.**

#### Hinweis

Auf der Website zum Buch finden Sie die Dateien und Aufgabenblätter für Schüler dazu. Die Konstruktionen können Sie sich mit der Navigationsleiste (rechte Maustaste) und „Abspielen“ ansehen. ◀

**Lösungen:** Die Abb. 7.12 unterscheidet sich von Abb. 7.27 im Buch S. 217 dadurch, dass ein Koordinatensystem gewählt wurde und weitere Bezeichnungen eingefügt worden sind. Die geometrischen Konstruktionen sind koordinatenfrei, aber wenn man auf eine Gleichung hinaus will, sollte man sich für ein vermutlich günstiges Koordinatensystem entscheiden. Zum Kommunizieren eines Beweises brauchen einige Punkte noch Namen. Lehrende sollten m.E. dieses nicht vorgeben, die Wahl ist schon ein erster interessanter Schritt auf dem mathematischen Weg.

**Zu Abb. 7.12 a) (hier)** Der Weg von  $Q$  ist der Kreis  $(u - r)^2 + v^2 = r^2$ , aufgelöst und umgestellt  $v^2 = u \cdot (2r - u)$ . Die letzte Gleichung ist auch als direkte Anwendung des Höhensatzes in dem Thaleskreis zu haben.  $P$  liegt mit  $Q$  aus derselben Ursprungsgeraden, also  $\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$ , was auch eine Strahlensatzbeziehung ist. Wir nehmen daraus  $u = \frac{v \cdot x}{y}$ . Eine

andere Strahlensatzbeziehung mit dem Dreieck  $OAB$  und  $Q$  ergibt  $\frac{v}{y} = \frac{2r-u}{2r}$ . Der Zähler des letzten Bruches ist oben schon vorhanden, zusammengeführt folgt  $v^2 = \frac{vx}{y} \cdot \frac{2rv}{y}$ . Man kann  $v^2$  aus dieser Gleichung kürzen und erhält  $y^2 = 2rx$ . Das ist die **Standard-Parabelgleichung**, mit  $r = p$ , dem Parabelparameter.

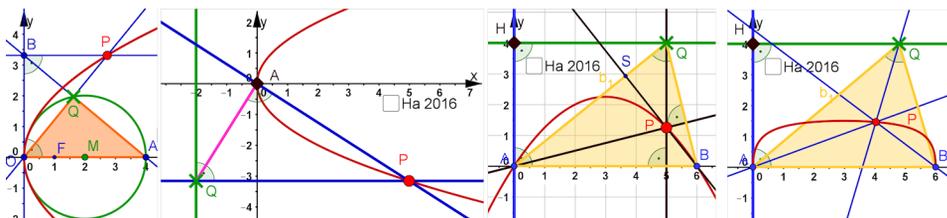
Damit liegt der Brennpunkt  $F$  der Parabel in der Mitte zwischen dem Kreismittelpunkt und dem Ursprung. Eine geometrische Herleitung scheint nicht erfolversprechend zu sein.

**Zu Abb. 7.12 b) (hier)** Die Steigung der violetten Geraden ist  $m_{AQ} = -\frac{v}{q}$ . In der Zeichnung ist  $q$  positiv,  $v$  negativ, die Steigung der violetten Strecke positiv, das passt. So testet man, ob die Vorzeichen richtig sind. Die dazu senkrechte Steigung ist  $m_{AP} = \frac{q}{v}$ . Die Gerade  $AP$  mit der Gleichung  $y = \frac{q}{v}x$  schneidet die untere waagerechte Gerade  $y = v$  in  $y = \frac{q}{v}x$ , also ist die Ortskurve  $y^2 = qx$ , eine **Standardparabel** mit dem Parameter  $p = \frac{q}{2}$ . Auch hier bietet sich keine geometrische Herleitung an.

**Zu Abb. 7.12 c) (hier)** Die Strategie ist es, zur Geraden  $OQ$  eine senkrechte Gerade durch  $B$  zu finden und deren Schnittpunkt in Abhängigkeit von  $u$  zu schreiben. Dann wird der Strahlensatz mit Zentrum  $B$  auf die Ortskurve führen. Dabei werden  $x$  und  $y$  nur für Objekte benutzt, auf denen  $P$  wirklich liegt, sonst verlore man leicht den Überblick.

Gerade  $OQ$ :  $t = \frac{h}{u}s$ , die Gerade  $BS$  ist dann  $t = -\frac{u}{h}(s - b)$  und es ergibt sich  $s = \frac{u^2b}{h^2+u^2}$  und  $t = \frac{h ub}{h^2+u^2}$ . Der Strahlensatz mit senkrechten Parallelen bringt nun  $\frac{t}{y} = \frac{b-s}{b-x}$ . Einsetzen unter Verwendung von  $x = u$  ergibt  $\frac{hxb}{(h^2+x^2)y} = \frac{b(h^2+x^2)-x^2b}{(h^2+x^2)(b-x)}$ . Es fällt viel fort und es bleibt  $y = \frac{1}{h}x(b-x)$ , eine **Parabel** in der üblichen Schreibweise mit den Nullstellen  $0$  und  $b$

**Die wichtigen Dreieckspunkte, sonst wie in c)** Man kann die Datei von c) einfach abwandeln und als  $P$  den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, der Seitenhalbierenden oder der Mittelsenkrechten wählen. In zweien der drei Fälle kann man ganz einfach die Ortskurve begründen. Im einem Fall wird sie von GeoGebra natürlich gut gezeichnet, aber eine Rechnung ist sehr sperrig, ich habe eine Parameterdarstellung gefunden, die sehr unübersichtlich ist und sich somit nicht lohnt. Es gibt noch mehr besondere Punkte im Dreieck, es ergibt sich ein weites Feld.



**Abb. 7.13** Lösungen der Ortsaufgaben Ergänzt sind die Winkelhalbierenden. Ergänzen Sie selbst für die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten.

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, Website zum Buch

## 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

### Aufgabe 7.9 Quadrat im Dreieck und Weiteres

Konstruiere in einem beliebigen Dreieck ein Quadrat, das auf einer Dreiecksseite steht und mit den anderen Seiten genau einen Punkt gemeinsam hat, siehe Abb. 7.14 b) (hier).

#### Hinweis

Diese Aufgabe war bis in die 90er Jahre üblich im Geometrieunterricht zum Thema Ähnlichkeit und Strahlensätze. Statt des Quadrates kann es auch ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck sein. Heute ist es möglich, an  $Q$  zu ziehen und das Wachsen des Quadrates zu beobachten. ◀

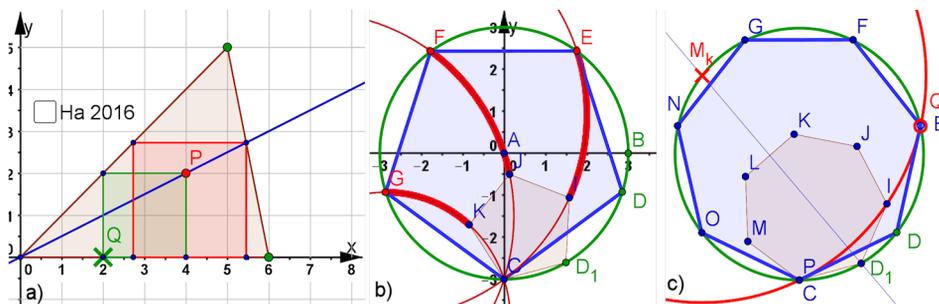


Abb. 7.14 Streckungs-Ortskurven Ergänzt sind eine 5-Ecks-Erkundung und eine 7-Ecks-Konstruktion unter Verwendung des n-Eck-Buttons

**Lösung mit weiteren Fragestellungen** Reizvoll ist die Aufgabe, ohne irgendwelche Berechnungen in einen gegebenen Kreis (ohne Kenntnis des Mittelpunktes) ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, das seine Ecken auf dem Kreis hat. In GeoGebra gibt es einen Button, bei dem ein regelmäßiges  $n$ -Eck durch Angabe von zwei benachbarten Eckpunkten und Eingabe von  $n$  erzeugt wird.

**Erkundung mit dem 5-Eck** In Abb. 7.14 b) (hier) ist mit den Punkten  $C$  und  $D$  auf dem Kreis ein kleines 5-Eck gezeichnet und (für die Herstellung der Abbildung) ein weiteres mit  $D_1$  dicht bei  $D$ . Zieht man nun an  $D$  und lässt die drei verbleibenden Eckpunkte ihre Spur zeichnen, bis alle Ecken auf dem Kreis liegen, so hat man handwerklich die Aufgabe gelöst.

Wählt man den Button *Ortslinie* für diese Ecken bei Bewegung von  $D$ , so hat es den Anschein, als seien die Ortslinien Kreise. Das kann man zeichnerisch bestätigen, indem man mit dem Button *Kreis aus 3 Punkten*, z. B. mit  $C$ ,  $I$  und  $E$ , einen Kreis erzeugt. Er liegt auf der Ortslinie. Sein Mittelpunkt, den wir mit *Mittelpunkt[<Kreisname>]* beschaffen, liegt auf dem grünen Kreis. Der Beweis steht unten.

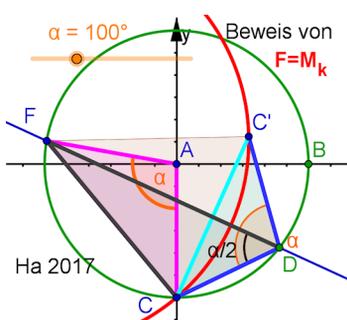
**Echte Konstruktion mit dem 7-Eck** In Abschnitt 6.4.1 im Buch ist zu lesen (und auch bewiesen), dass das regelmäßige 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal allein konstruierbar ist.

Daran kann man nicht rütteln. Aber wir haben hier eine kräftige Werkzeugenerweiterung: GeoGebra beschafft durch interne Rechnungen das 7-Eck. Was *nun noch* von uns gemacht wird, geht mit Zirkel und Lineal allein.

Zuerst konstruieren wir mit der Mittelsenkrechten auf  $CI$  den Mittelpunkt des roten Kreises durch Schnitt mit dem grünen Kreis (Beweis unten). Dann zeichnen wir den roten Kreis, bringen ihn mit dem grünen zum Schnitt und erhalten  $Q$ . Wenn wir nun  $D$  so ziehen, dass  $E$  auf  $Q$  fällt, haben wir das 7-Eck. Wir könnten aber auch mit der Mittelsenkrechten von  $\overline{QC}$  die Stellung von  $D$  exakt konstruieren.

### Der Mittelpunkt $M_k$ des Wanderkreises von $C'$ liegt stets auf dem Ausgangskreis

Diese Aussage bezieht sich auf die Startsituation in der eben beschriebenen 7-Ecks-Konstruktion. Sie gilt aber nicht nur für für die Innenwinkel von 5-Eck und 7-Eck, sondern für jeden Winkel  $\alpha$ , siehe Abb. 7.15 (hier).



**Abb. 7.15 Drachen am Start für die Streckung der n-Ecke** Ein Drachen habe den Winkel  $\alpha$ , der von seiner Symmetrieachse halbiert wird. Zu einem gegebenen Kreis (grün) wird nun ein Drachen konstruiert, dessen Symmetrie-Diagonale und zwei seiner i.A. verschiedenen Seiten Sehnen im gegebenen Kreis sind, siehe Abb. 7.15 (hier). Beim Ziehen des Scheitels von  $\alpha$  wandert die vierte Ecke  $C'$  des Drachens auf einem Kreis (rot) um das andere Ende der Diagonale. Durch Schnitt dieses Kreises mit dem gegebenen Kreis kann dann ein **einbeschriebener Drachen** konstruiert werden.

**Beweis** Auf den gegebenen Kreis werden  $C$  und  $D$  gesetzt und der über einen Schieber gegebene Winkel  $\alpha$  angetragen. GeoGebra setzt dabei  $C'$  so, dass  $\overline{DC} = \overline{DC'}$  ist. Die Mittelsenkrechte von  $\overline{CC'}$  schneidet den gegebenen Kreis in  $F$ . damit existiert der rote Kreis und zu zeigen bleibt, dass auf ihm  $C'$  wandert, wenn  $D$  auf dem Kreis wandert: Über der Sehne  $\overline{FC}$  ist der Umfangswinkel (Peripheriewinkel)  $\angle FDC = \frac{\alpha}{2}$ . Es ist der zugehörige Mittelpunktswinkel also das gegebene  $\alpha$ . Über der festen Sehne  $\overline{FC}$  sind nach dem Umfangswinkelsatz die Umfangswinkel an derselben Seite der Sehne alle gleich groß. Das heißt hier, alle Drachen, die sich beim Ziehen von  $D$  ergeben, (mathematisch) ähnlich sind, dazu gehört auch der Drachen, bei dem  $C'$  auf dem grünen Kreis liegt.

**Ergebnis:** **Mit Zirkel, Lineal und n-Eck-Button kann jedem Kreis ein n-Eck einbeschrieben werden.**

**Folgerung** Durch Antragen von  $\alpha$  an  $\overline{AC}$  kann man auch gleich  $F$  und mit dem Durchmesser  $\overline{FA}$  dann  $D_n$  konstruieren. Hierzu finden Sie auf der Website ein animiertes Bild mit GeoGebra-Datei. **Achtung:** Das Antragen von beliebigen Winkeln gilt nicht als „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ im strengen Sinn, siehe Kapitel 6.

**Ausblick** Dem Erfindungsgeist sind hier keine Grenzen gesetzt. Man könnte ein 9-Eck in irgendeinem Logo platzieren oder andere kreative Ideen umsetzen.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

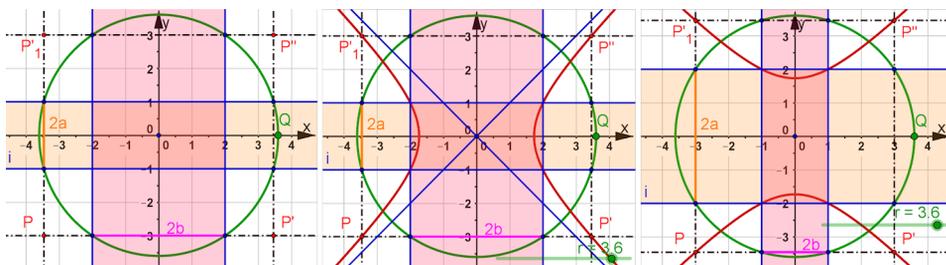
#### Aufgabe 7.10 Das breite Kreuz

Das breite Kreuz wird von einem Kreis mit variablem Radius geschnitten. Gesucht ist der geometrische Ort der vier symmetrisch gelegenen Punkte  $P, P', P'', P'''$ , siehe Abb. 7.28 b) im Buch S.218 oder Abb 7.16 a) (hier).

Versuchen Sie, eine Gleichung für die Ortskurve in Abhängigkeit von  $a, b, r = \overline{OQ}$  aufzustellen.

#### Hinweis

Bei [Schupp 2000, S. 66, Bspl. 2] steht diese Aufgabe „umgekehrt“. Die rechte Ecke bei  $P$  ist fest und gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die die orangefarbene und die violette Sehne aus den Schenkeln des rechten Winkels ausschneiden. Schupps Version ist leicht zu rechnen aber schwer zu konstruieren. ◀



**Abb. 7.16 Aufgabe 7.10 Das breite Kreuz** Lösungen mitte und rechts für  $a = 1$  und  $b = 2$ , bzw. umgekehrt. Das Aysmptotenkreuz ist Lösung für  $a = b$ .

**Lösung:** Es ist günstig,  $r$  direkt als Schieberegler zu verwirklichen und die beiden Geraden  $y = \pm a$  und  $y = \pm b$  mit dem grünen Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  zum Schnitt zu bringen. Subtraktion der Gleichungen  $x^2 + a^2 = r^2$  und  $b^2 + y^2 = r^2$  ergibt sofort die Hyperbelgleichung  $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$  und das ist schon die gesuchte Ortskurve. Für  $a = b$  ist das rechtwinklige Geradenkreuz  $y = \pm x$ .

Wenn Sie, gelockt durch den Hinweis, zunächst die Parameterdarstellung  $x^2(r) = r^2 - a^2$  und  $y^2(r) = r^2 - b^2$  aufgestellt haben, erhalten Sie bei Elimination von  $r$  dieselbe Hyperbelgleichung.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 7.11 Die drei ??? tauchen auf

$Q$  wandert auf dem Kreis um  $A$  durch  $O$ ,  $C$  hat dieselbe Ordinate wie  $Q$ . Die Geraden  $BC$  und  $AQ$  schneiden sich in  $P$ , siehe Abb. 7.28 c) im Buch S. 218 oder Abb. 7.17 a). Die drei ??? erscheinen unvermutet als Ortskurven von  $P$  bezüglich  $Q$ , wenn man drei wesentliche Stellungen von  $B = (b, 0)$  (Das ist günstiger als es im Buch genannt ist.) betrachtet. Prüfen Sie mit dem 5-Punkte-Tipp aus Aufgabe 7.5

#### Hinweis

Diese Aufgabe steht bei [Schupp 2000, S. 67 Bspl. 4] in anderer Stellung. ◀

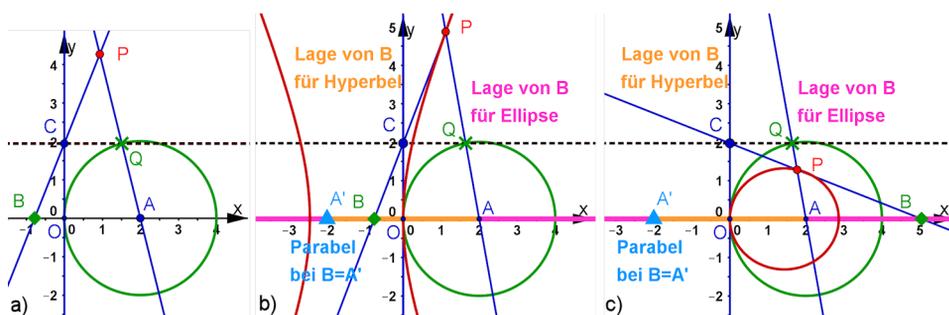


Abb. 7.17 Aufgabe 7.11 Die drei ??? (Fragezeichen)

- Aufgabenstellung:  $A = (a, 0)$ , und  $B = (b, 0)$ , Punkt  $Q$  wandert auf dem Kreis,  $AQ$  definiert  $C$  auf der  $y$ -Achse, Schnitt von  $BC$  und  $AQ$  definiert  $P$ .
- Die Ortskurve von  $P$  ist eine **Hyperbel**, wenn  $B$  im orangefarbenen Bereich liegt, eine **Parabel** für  $B = A'$  und
- eine **Ellipse** sonst. Die drei ??? sind also die Kegelschnitte. Isolierter Punkt und Doppelgerade sind sogar auch dabei.

**Lösung** Der Weg von  $Q = (u, v)$  ist Gleichung (1)  $(u - a)^2 + v^2 = a^2$ . Die Gerade  $AC$  erfüllt Gleichung (2)  $y = -\frac{v}{b}(x - b)$ , was  $v = -\frac{by}{x-b}$  zur Folge hat. Die Gerade  $BC$  erfüllt (3)  $y = \frac{v}{u-a}(x - a)$ , was mit Gl. (2) zu  $y(u - a) = -\frac{by}{x-b}(x - a)$  führt. Kürzen von  $y$  ( $y = 0$  wird extra betrachtet) ergibt  $(u - a) = -\frac{b(x-a)}{x-b}$ . Dieses mit (2) in (1) eingesetzt hat nach Beseitigung der Nenner und Zusammenfassung das Ergebnis  $(a^2 - b^2)x^2 - 2ab(a - b)x - b^2y^2 = 0$ .

**Parabel und Sonderfälle** Wenn  $a = -b$  ist, fällt der  $x^2$ -Term weg, und die **Parabel**  $y^2 = 4ax$  ist die Ortskurve. Ihr Parabelparameter ist  $p = 2a$  und damit ist  $A$  ihr Brennpunkt und  $B = A'$  liegt auf der Leitgeraden.

Wenn  $a = b$ , also für  $B = A$ , zeigt GeoGebra nur **Punkt**  $A$  an, wie es sich auch aus der Geometrie ergibt. Rechnerisch fallen beide  $x$ -Terme weg und  $y^2 = 0$  beschreibt die  $x$ -Achse. Von dieser ist aber geometrisch nur  $A$  Lösung.

Für  $B = O$ , also  $b = 0$  ist die y-Achse Lösung, zwei Hyperbeläste „fallen zusammen“, Lösung ist also eine **Doppelgerade**.

**Ellipsen und Hyperbeln** Sei nun  $a^2 \neq b^2$ . Ausnutzung der 3. binomischen Formel beim Dividieren durch  $(a^2 - b^2)$  bringt  $x^2 - 2\frac{ab}{a+b}x - \frac{b^2}{a^2-b^2}y^2 = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$ . Damit haben wir für  $a^2 > b^2$  eine **Hyperbel** (orangefarbener Bereich für  $B$ ) und für  $a^2 < b^2$  ein **Ellipse** (violetter Bereich für  $B$ ).

**Mittelpunkt und Scheitel** Der Mittelpunkt dieser beiden Kegelschnitte ist  $\frac{ab}{a+b}$ . Er rückt für  $b \rightarrow \pm\infty$  von links, bzw. rechts gegen  $A$ . Das sieht man an  $\frac{a}{\frac{b}{a}+1}$ .

Ein Scheitel erfüllt  $y = 0$ , da die Konstruktion symmetrisch zur x-Achse angelegt ist.  $x^2 - 2\frac{ab}{a+b}x = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$  ergibt  $x = 0$  oder  $x = \frac{2ab}{a+b}$ .

Für  $b \rightarrow -a$  kann man umschreiben  $b = -a \pm \varepsilon$  und erhält für den anderen Scheitel  $x_s = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2a^2 \pm 2a\varepsilon}{\pm\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \pm\infty$ . Bewegt sich  $B$  vom Ursprung aus nach links, so wandert der linke Scheitel der Hyperbel nach links in Unendliche und kommt dann von rechts als Ellipsenscheitel wieder herein, er nähert sich dann dem grünen Kreis von außen.

Wandert  $B$  vom Ursprung aus nach rechts, so rückt der rechte Hyperbelscheitel an  $A$  heran. Danach rückt ein Ellipsenscheitel nach rechts von innen an den grünen Kreis heran. Für endliche Stellungen von  $B$  wird aber  $A$  nicht erreicht. Diese Ellipsen sind alle innerhalb des grünen Kreises.

**Fazit** Ich finde es erstaunlich, wie ergiebig diese einfache Konstruktion ist. Die verschieden Fälle und Übergänge zu erklären, zu beschreiben und rechnerisch abzusichern, das gehört zum „**mathematischen Argumentieren und Kommunizieren**“, wie es die Richtlinien fordern. Da gibt es nichts auswendig Gelerntes daherzuplappern, sondern Lernende können sich in eigener Regie und wachsender Selbstständigkeit den Fragen und Antworten widmen.

**Zur Ausführlichkeit der Lösungen überhaupt** Ich hätte in den Lösungen (auch vieler anderer Aufgaben) sehr viel knapper formulieren können, oder gar nur Endergebnisse nennen können. Aber Mathematik lernen nur die wenigsten ganz alleine. Es ist wie in der Musik: obwohl ich schon etliche Jahrzehnte im Orchester und Streichquartett Bratsche spiele, bin ich froh, wenn mir ein Könnler zeigt, wie man diese oder jene schwierige Stelle meistert. Genau **das** bringt mich weiter. Zu wissen, wie die Noten heißen und der Rhythmus geht, reicht nicht!



# 8 Kurven mit Drehwurm

---

## Übersicht

8.1	Spiralen	103
8.2	Rosetten	103
8.3	Rollkurven	103
8.4	Schwingungen	104

---

## 8.1 Spiralen

### 8.1.1 Archimedische Spirale

### 8.1.2 Die Königin der Spiralen

### 8.1.3 Spiralen, systematisch betrachtet und frei erfunden

## 8.2 Rosetten

### 8.2.1 Grundlage für die Rosetten

### 8.2.2 Rosette als Fußpunktkurve der Astroide

### 8.2.3 Rosetten mit variabler Blattgröße

## 8.3 Rollkurven

### 8.3.1 Zykloiden

### 8.3.2 Trochoiden

### 8.3.3 Rollende Parabel und die Kettenlinie

## 8.4 Schwingungen

### 8.4.1 Sinus- und Kosinusschwingung

### 8.4.2 Lissajous-Kurven

# 9 Besondere Erzeugungsweisen für Kurven

---

## Übersicht

9.1	Fußpunktkurven .....	105
9.2	Enveloppen, Evoluten, Involuten, Evolventen .....	119
9.3	Evoluten als Hüllkurven von Normalenscharen .....	119
9.4	Reflexion und Kaustiken .....	119
9.5	Inversion am Kreis .....	134
9.6	Exoten-Kurven .....	147

---

## 9.1 Fußpunktkurven

### 9.1.1 Fußpunktkurve einer Parabel

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

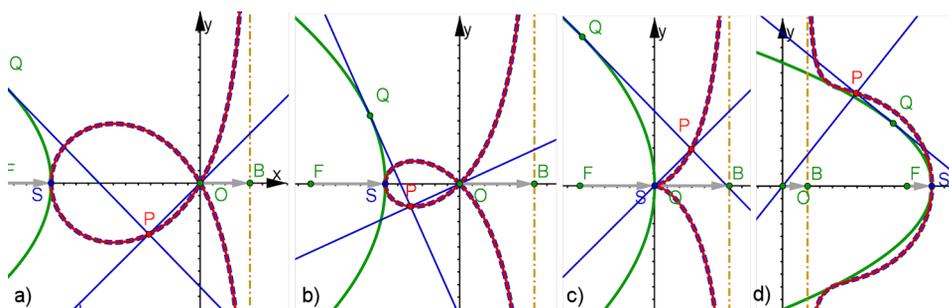
#### Aufgabe 9.1 Sluze-Konchoiden als Fußpunktkurven der Parabel?

Den Konchoiden des Baron de Sluze ist der Abschnitt 5.2.2 gewidmet. Hat [Kuno Fladt 1962, S. 385] recht, wenn er behauptet, die Sluze-Konchoiden seien Fußpunktkurven der Parabel?

#### Hinweis

Schreiben Sie die in Abb. 5.8 (Buch, S. 143) angegeben kartesische Gleichung so um, dass die Schleifen nach links zeigen. Beachten Sie als Hilfe die einleitend vorgeschlagene Vorgehensweise. ◀

**Lösung, gedrehte Sluze-Kurven** Tausch von  $x$  und  $y$  ergibt  $(x-b)(x^2+y^2) = ax^2$ . Wir setzen  $c := a$ , damit es nicht zu Namenskonflikten kommt, und fassen die  $x^2$ -Terme zusammen. Dann ist  $(x-b-c)x^2 = (b-x)y^2$  die allgemeine Gleichung für die Sluze-Kurven mit den Schleifen nach links, der Asymptote  $x = b$ , dem Scheitel  $S = (b+c, 0)$  und dem Doppelpunkt im Ursprung.



**Abb. 9.1 Aufgabe 9.1 Sluze-Kurven als Fußpunktkurven** a) Trisektrix  $b = 2$ ,  $c = -8$ , b) Strophoide  $b = 3$ ,  $c = -6$ , c) Cissoide des Diokles  $b = 3$ ,  $c = -3$ , d) Sluze-Kurve auf der anderen Seite der orangefarbenen Asymptote  $b = 1$ ,  $c = -5$ . Siehe Abb. 5.8 Seite 143 im Buch.

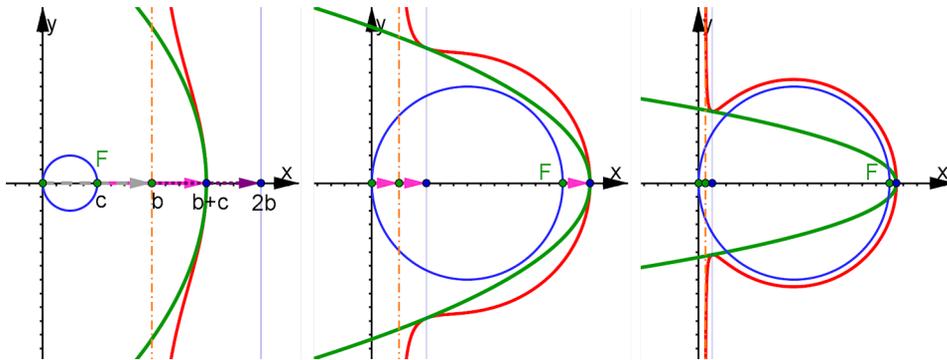
**Verschobene Fußpunktkurven der Parabel** In Gleichung 9.3 auf Seite 258 im Buch ist das schon vorbereitet. Vergleichen wir also  $(a+x)x^2 = (\frac{p}{2}-x)y^2$  mit der Sluze-Gleichung von oben, so sehen wir, dass wir setzen müssen  $a := -(c+d)$  und  $\frac{p}{2} := b$ , damit die Gleichungen übereinstimmen. Die Parabel ist natürlich dann auch nach links verschoben und hat die Gleichung  $y^2 = -2p(x-b-c)$ .

**Weitere Zusammenhänge** Da in Abschnitt 5.2.2, incl. Aufgabe 5.5, schon gezeigt ist, dass die klassischen Kurven Trisektrix, Strophoide und Cissoide des Diokles spezielle Baron de Sluze - Kurven sind, erkennen wir nun in Abb. 9.1 a), b) und c) (hier) diese Kurven.

Da der Brennpunkt die Entfernung  $\frac{p}{2}$  vom Scheitel  $S$  hat und die Asymptote den Abstand  $b = \frac{p}{2}$  tritt in der Abb. 9.1 (hier) der graue Vektor zweimal auf. Der Parabelparameter  $p$  bestimmt also unmittelbar die Stellung der Asymptote. Bei der Cissoide des Diokles ist die Leitgerade der Parabel die Asymptote.

**Weitere Berührung der Parabel** Die Fußpunktkurve einer Parabel liegt stets ganz auf der konvexen Seite der Parabel, denn alle Tangentenpunkte liegen allenfalls auf dem Parabelgraphen, sonst außerhalb. Rechts von der Asymptote sieht man in Abb. 9.2 bei festem  $b$  für wachsende  $c$  zunächst einen schlanken Bogen, der dann aber eine Einbuchtung bekommt und wie ein Knauf aussieht. Hierbei wird die Parabel  $y^2 = -4p(x - b - c)$  außer am Scheitel nochmals berührt. Dadurch können wir den Berührungspunkt bestimmen:  $(x - b - c)x^2 = (b - x)(-4b(x - b - c))$ . Diese Gleichung wird, außer vom Scheitel, für  $x = 2b$  gelöst, die zugehörigen Ordinaten erfüllen  $y^2 = 4b(c - b)$ . Diese gibt es nur für  $c > b$ .

Bei festem  $c$  kann man sich für kleiner werdende  $b$  ansehen, wie sich die Kurve zwischen einen Kreis und die y-Achse klemmt. Es ist der Kreis, den man für  $b = 0$  erhält:  $(x - c)x^2 = (0 - x)y^2$ , also  $(x - \frac{c}{2})^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$ . Diese Zusammenhänge sind in Abb. 9.2 dargestellt.



**Abb. 9.2** Aufgabe 9.1 Fußpunktkurven der Parabel, rechts der Asymptote a)  $b = 8, c = 4,$   
 b)  $b = 2, c = 12,$  c)  $b = 0.5, c = 12,$  die animierte Version ist auf der Website,

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

#### Aufgabe 9.2 Fußpunktkurven der Ellipsen

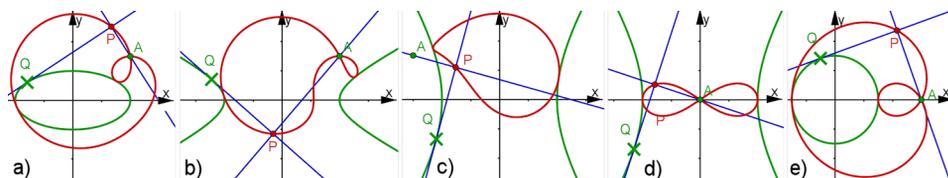
Konstruieren Sie die Fußpunktkurven zu Ellipsen mit der Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  für beliebige Lage des Pols  $A = (c, d)$ .

1. Warum liegen alle Fußpunktkurven außerhalb der Ellipse?
2. Sind sie Booth'sche Lemniskaten, wenn  $A$  im Ursprung liegt?
3. Sind sie – bei beliebiger Lage von  $A$  – Pascal'sche Schnecken, wenn die Ellipse speziell ein Kreis ist?
4. In welchem Sonderfall ergibt sich eine Kardioide?

#### Hinweis

Legen Sie für die Halbachsen  $a$  und  $b$  der Ellipse Schieberegler an. Verschaffen Sie sich durch Ziehen an  $A$  zunächst einen Überblick. Beachten Sie als Hilfe die einleitend vorgeschlagene Vorgehensweise. ◀

**Lösung Zu 1.** Per definitionem liegen die Fußpunkte auf der Tangente. Aber keine Tangentenpunkte liegen innerhalb der Ellipse. Damit kann auch kein Punkt einer Fußpunktkurve (=Pedalkurve) innerhalb der Ellipse liegen. Auf dem Rand der Ellipse können sie allerdings liegen.



**Abb. 9.3 Aufgabe 9.2 Fußpunktkurven der Kegelschnitte** a) Ellipse  $a = 2$ ,  $b = 1$   $A = (2, 1)$ , b) Hyperbel  $a = 2$ ,  $b = 1$   $A = (2, 1)$ , c) Hyperbel  $a = 2$ ,  $b = 3$   $A = (-3, 1.5)$ , d) Hyperbel  $a = 2$ ,  $b = 3$   $A = (0, 0)$  Lemniskate? e) Kreis  $a = 1.5$ ,  $b = 1.5$   $A = (3, 0)$  Pascalsche Schnecke?

**Herleitung einer allgemeinen Gleichung** Wir gehen in üblicher Weise vor: Der Weg von  $Q = (u, v)$  ist  $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ . Die Tangente in  $Q$  hat nach Gleichung 7.9 auf Seite 201 die Gleichung  $\frac{u}{a^2}x + \frac{v}{b^2}y = 1$ . Als Steigung ergibt sich  $-\frac{b^2u}{a^2v}$ . Damit ist das Lot von  $A = (c, d)$  aus:  $y = \frac{a^2v}{b^2u}(x - c) + d$ . Aus den drei Gleichungen liefert der Eliminate-Befehl von Mathematica:

**Gleichung für die allgemeine Pedalkurve der Ellipsen**

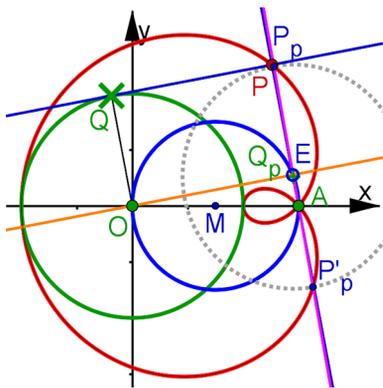
$$a^2(c - x)^2 + b^2(d - y)^2 = (x(c - x) + y(d - y))^2 \quad (9.1)$$

Das Mathematica-Notebook mit allen Rechnungen ist auf der Website, auch als \*.pdf. Wenn man  $A$  in der Zeichenebene umherzieht, ergeben sich, wenn  $A$  außerhalb der Ellipse liegt, Kurven mit Schlaufen, mit Kurven mit Spitze für  $A$  auf dem Rand, die Ellipse umgreifende „weiche“ Formen für innen liegende  $A$ .

**Booth'sche Kurven, zu 2.** Für  $c = 0$  und  $d = 0$  folgt aus der allgemeinen Gleichung  $a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$ . Das ist ein **Booth'sches Oval** nach Gleichung 4.31 auf Seite 117 im Buch. Übrigens ist es mit den **Booth'sche Lemniskaten** wie mit den *Katzen*: der Name bezeichnet sowohl einen Oberbegriff als auch speziell die in der genannten Gleichung mit  $\Omega$  bezeichneten Booth'schen Ovale und die mit  $\Lambda$  bezeichneten Booth'schen Lemniskaten, „im engeren Sinne“ sagt man. Ebenso: *Kater* und (weibliche) *Katzen*. Oft bevorzuge ich als Oberbegriff aber **Booth'sche Kurven**.

**Pascal'sche Schnecken, zu 3.** Wenn die Ellipse speziell ein Kreis ist, kann  $A$  o.B.d.A auf die  $x$ -Achse gelegt werden, wie es Abb. 9.3 e) zeigt. Im folgenden wird sowohl geometrisch als auch analytisch gezeigt, dass dieser Fall zu allen Pascal'schen Schnecken führt.

Dabei betrachten wir vorweg  $A = O$ . Der Tangenten-Berührungspunkt und der Lotfußpunkt fallen nun zusammen und die Pedalkurve eines Kreises mit dem Pol in seinem Mittelpunkt ist dieser Kreis selbst.



**Abb. 9.4 Zu 3: Pascal'sche Schnecke als Pedalkurve der Ellipse**

Vergleich mit Abb. 3.6 von S.47 im Buch zeigt, dass der Radius des grünen Kreises (im Bild links) die Leinenlänge  $k$  sein muss, wenn man auf „Pascalsche Schnecke“ hinaus will, denn von einer Stelle der  $x$ -Achse muss  $Q_p$  mit  $k$  nach rechts und links zwei Nullstellen der Pascal'schen Schnecke erreichen. Damit liegt im Bild links der Ursprung auf dem Wanderkreis, der andererseits den Doppelpunkt  $A$  enthalten muss. Der Mittelpunkt des blauen Wanderkreises ist also  $M = (\frac{c}{2}, 0)$ , wenn  $A = (c, 0)$  ist.

**Geometrischer Beweis** Wie oft im Buch erwähnt ist, muss man für den geometrischen Nachweis, dass zwei Konstruktionen auf dieselbe Kurve führen, beide Konstruktionen in *einer* Zeichnung verwirklichen und die beiden Punkte  $P$  und  $P_p$  aufeinanderlegen. Wie auch auf Seite 279 im Buch beschrieben, **zeigt sich hier die Stärke eines DGS wie GeoGebra**. Erst nachdem ich einige Stellungen betrachtet habe, bin ich auf die Konstruktionsmöglichkeit gestoßen: Per Konstruktion der Pedalkurve ist der Winkel  $\angle QPA$  ein rechter Winkel. Die Parallele zur Tangente  $QP$  durch  $O$  schneidet den Wanderkreis in  $E$ . Auch  $\angle OEA$  ist ein rechter Winkel, da der Wanderkreis als Thaleskreis fungiert. Der grüne und der grau gestrichelte Kreis haben denselben Radius  $k = a = b$ , wie in der Legende zu Abb. 9.4 gezeigt. Darum ist  $Q_p$  mit  $E$  zu identifizieren und  $P$  und  $P_p$  fallen zusammen.

**Analytischer Beweis** Die Gleichung 3.6 von Seite 48 der Pascal'schen Schnecke aus Abb. 3.6 von Seite 47 a) ist  $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = k^2(x^2 + y^2)$ . Soll die Schlaufe nach links zeigen, wird aus dem Minus ein Plus. Dann brauchen wir eine Verschiebung um  $c$  nach rechts und der Durchmesser des Wanderkreises ist  $2a = c$ . Das ergibt  $((x - c)^2 + y^2 + c(x - c))^2 = k^2((x - c)^2 + y^2)$ . Links besser zusammengefasst:  $(x^2 + y^2 - cx)^2 = k^2((x - c)^2 + y^2)$

Andererseits ist in der oben hergeleiteten Gleichung für die allgemeine Pedalkurve der Ellipsen nun  $a = b = k$  und  $d = 0$  zu nehmen. Das ergibt  $k^2(c - x)^2 + k^2(y)^2 = (x(c - x) - y^2)^2$ , also  $k^2((c - x)^2 + y^2) = (-x^2 - y^2 + cx)^2$ . Wenn wir rechts noch eine  $(-1)^2$  herausziehen, haben wir dieselbe Gleichung wie für die Pascal'schen Schnecken.

Wenn wir nun noch bedenken, dass die Lage von  $A$  auf der x-Achse die Allgemeinheit nicht einschränkt, können wir sagen:

**Alle Pedalkurven von Kreisen sind Pascalsche Schnecken und umgekehrt.** Speziell ist die **Kardioide die Pedalkurve eines Kreises** mit dem Pol auf der Peripherie.

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

### Aufgabe 9.3 Fußpunktkurven der Hyperbeln

Konstruieren Sie die Fußpunktkurven zu Hyperbeln mit der Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  für beliebige Lage des Bezugspunktes  $A = (c, d)$ .

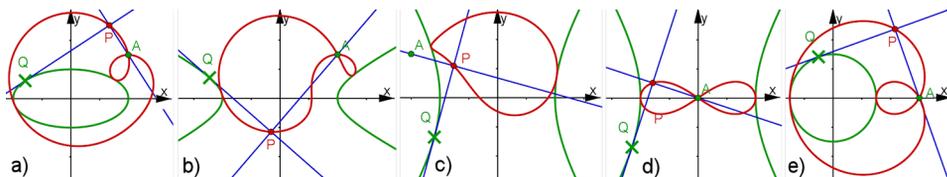
1. Warum liegen alle Fußpunktkurven zwischen den Hyperbelästen?
2. Sind sie Booth'sche Lemniskaten, wenn  $A$  im Ursprung liegt?
3. Wie unterscheiden sich die Fußpunktkurven je nachdem ob der Pol  $A$  zwischen den Ästen oder auf der konkaven Seite der Äste liegt?
4. In welchem Sonderfall ergibt sich eine Bernoulli'sche Lemniskate?

### Hinweis

Ersetzen Sie in der Datei für die vorige Aufgabe in der Kegelschnittgleichung das Plus durch ein Minus. Verschaffen Sie sich durch Ziehen an  $A$  zunächst einen Überblick. Beachten Sie als Hilfe die einleitend vorgeschlagene Vorgehensweise. ◀

**Lösung** Der Leser möge verzeihen, dass einige Passagen dieses Textes fast wörtlich mit der Lösung von Aufgabe 9.2 zu den Ellipsen übereinstimmen. Aber mir war es wichtig, dass diese Lösung auch ohne Rückgriff auf letztere Aufgabe verständlich ist. Außerdem ist es ja eine **tiefe mathematische Wahrheit**, dass Ellipsen und Hyperbel trotz ihres unterschiedlichen Aussehens sehr viel gemeinsam haben.

**Zu 1.** Per definitionem liegen die Fußpunkte auf der Tangente. Aber keine Tangentenpunkte liegen innerhalb der des konkaven Teils „ihres“ Astes. Den anderen Ast können die Tangenten nicht schneiden. Das sieht man sofort in der üblichen Lage, in der die Scheitel auf der x-Achse liegen, da sind die Tangenten steiler als die Asymptoten. Damit kann auch kein Punkt einer Fußpunktkurve (=Pedalkurve) innerhalb den konkaven Hyperbelbögen liegen. Auf dem Rand der Hyperbel können sie allerdings liegen.



**Abb. 9.5 Aufgabe 9.2 Fußpunktkurven der Kegelschnitt** a) Ellipse  $a = 2, b = 1, A = (2, 1)$ , b) Hyperbel  $a = 2, b = 1, A = (2, 1)$ , c) Hyperbel  $a = 2, b = 3, A = (-3, 1.5)$ , d) Hyperbel  $a = 2, b = 3, A = (0, 0)$  Lemniskate? e) Kreis  $a = 1.5, b = 1.5, A = (3, 0)$  Pascalsche Schnecke?

**Herleitung einer allgemeinen Gleichung** Wir gehen in üblicher Weise vor: Der Weg von  $Q = (u, v)$  ist  $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ . Die Tangente in  $Q$  hat nach Gleichung 7.9 auf Seite 201 die Gleichung  $\frac{ux}{a^2} - \frac{vy}{b^2} = 1$ . Als Steigung ergibt sich  $\frac{b^2u}{a^2v}$ . Damit ist das Lot von  $A = (c, d)$  aus:  $y = -\frac{a^2v}{b^2u}(x - c) + d$ . Aus den drei Gleichungen liefert der Eliminate-Befehl von Mathematica:

**Gleichung für die allgemeine Pedalkurve der Hyperbeln**

$$a^2(c - x)^2 - b^2(d - y)^2 = (x(c - x) + y(d - y))^2 \quad (9.2)$$

Das Mathematica-Notebook mit allen Rechnungen ist auf der Website, auch als \*.pdf.

**Booth'sche Kurven, zu 2.** Für  $c = 0$  und  $d = 0$  folgt aus der allgemeinen Gleichung  $a^2x^2 - b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$ . Das ist eine **Booth'sche Lemniskate** nach Gleichung 4.31 auf Seite 117 im Buch.

**Zu 4.** Wenn zudem  $a = b$  gilt, folgt  $a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$  und mit  $a^2 = 2e^2$  haben wir die Bernoulli'sche Lemniskate aus Gleichung 4.22 von Seite 108.

**Zu 3.** Wenn man  $A$  in der Zeichenebene umherzieht, ergeben sich, wenn  $A$  im konvexen Bereich der Hyperbel liegt, Kurven mit einem Doppelpunkt, mit Kurven mit Spitze für  $A$  auf dem Rand, die den konvexen Bereich der Äste der Hyperbel umgreifende „weiche“ Formen für in den konkaven Bereichen liegende  $A$ .

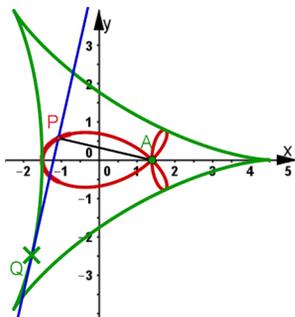
**Anmerkung** Bei der Hyperbel gibt es keine Entsprechung zu den Pascal'schen Schnecken. Allenfalls könnte man die Familie der Kurven betrachten, die mit  $A = (c, 0)$  entstehen, also  $a^2(c - x)^2 - b^2y^2 = (x(c - x) + y^2)^2$ . Hier aber liefert  $a = b$  keine besonderen Formen. Dreht man die entstehenden Kurven um  $90^\circ$  so sehen sie aus wie Schneemänner.

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.1.2 Weitere Fußpunktkurven und Aufgaben

### Aufgabe 9.4 Fußpunktkurven der Steiner-Kurve und der Astroide



**Abb. 9.6** Steiner-Kurve oder Deltoid mit einer ihrer Fußpunktkurven. Parameterdarstellung der Steiner-Kurve

$$\begin{aligned} x(t) &= \varrho (2 \cos(t) + \cos(2t)) \\ y(t) &= \varrho (2 \sin(t) - \sin(2t)) \end{aligned} \tag{9.3}$$

Die kartesische Gleichung der Steiner-Kurve ist:  
 $(x - 3\varrho)^3(x + \varrho) + y^2(2x^2 + y^2 + 24x\varrho + 18\varrho^2) = 0$   
 Jakob Steiner (1796-1863) war Schweizer Mathematiker, der später in Berlin arbeitete und Bedeutendes in der Geometrie geleistet hat.

Die **Steiner-Kurve** ist eine Hypotrochoide mit drei Spitzen. Sie ist in Abb. 9.6 zu sehen, aber auch schon in Abb. 8.29 b). Aus Gleichung 8.13 folgt die neben dem Bild angegebene Parametergleichung mit  $m = 3$ ,  $k = 1$  und beliebigem Radius  $\varrho$  des Rollkreises. Es gilt für den Umkreisradius  $R = 3\varrho$ .

Erzeugen Sie – als Spur von  $P$  – die Fußpunktkurven zu mehreren Stellungen des Pols  $A$ . Es gibt das Trifolium, andere Dreiblatt-, Zweiblatt- und Einblattkurven.

Auf die gleiche Weise können Sie auch selbst mit der **Astroide** experimentieren, bei der als Fußpunktkurve das Quadrifolium in Abb. 8.22 gezeigt ist. Welche Varianten ergeben sich hier?

#### Hinweis

Ausführliche Lösungen finden Sie auf der Website zum Buch. Die kartesische Gleichung der Fußpunktkurven der Steiner-Kurve ist:  $((x - a)^2 + y^2)^2 + (x - a)^3(\varrho + a) - (3\varrho - a)(x - a)y^2 = 0$  ◀

**Implizite kartesische Gleichung der Steiner-Kurve** Im Folgenden ist  $\varrho = a$  der Radius des (hier nicht sichtbaren) Rollkreises und  $3\varrho = 3a$  der Umkreisradius für die Steiner-Kurve. Für die Herleitung der im Hinweis genannten Gleichung substituiert man  $c = \cos[t]$  und  $s = \sin[t]$  und nimmt noch  $c^2 + s^2 = 1$ . Dann schafft `Eliminate[{x==a (2c+c^2-s^2), y==a (2s-2 s c), c^2+s^2==1},{c,s} ] //FullSimplify` die Gleichung aufzustellen. Ohne die Substitution kommt man nur umständlicher mit `Reduce` zum Ziel. Dieses und alle weiteren Rechnungen können Sie ausführlich in der Mathematica-Datei (und deren \*.pdf) auf der Website lesen.

**Teil 1, Fußpunktkurven der Steiner-Kurve, Lösung:** Mit der Parameterdarstellung der Steiner-Kurve kann man die Tangente in  $Q$  und das Lot von  $A$  auf  $Q$  bestimmen und zum Schnitt  $S = (S_x, S_y)$  bringen. Die zugehörigen Terme geben schon die Parameterdarstellung der Pedalkurven. Hiermit ist die interaktive Darstellung auf der Website gebaut.

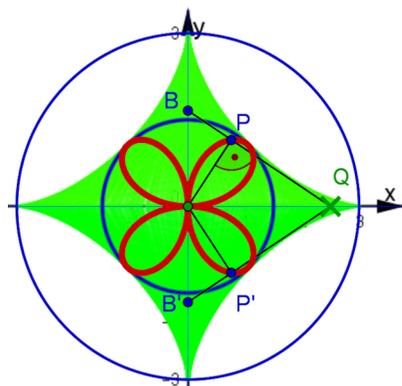
Wieder mit obiger Substitution und Eliminate erhält man dann

$$\text{Pedale: } y^4 = (x - b) (y^2(3a + b - 2x) - (x + a)(x - b)^2) \quad (9.4)$$

als implizite kartesische Gleichung der Pedalkurven der Steiner-Kurve.

**Formen der Pedalkurven der Steiner-Kurve** Der Pol sei  $A = (b, 0)$ .

- $b < -a$  Einblatt, wie eine Bohne
- $b = -a$  Zweiblatt, die die Grundblätter einer Blume
- $-a < b < 0$  Dreiblatt, links eins klein, recht zwei größere
- $0 = b$  reguläres Trifolium
- $0 < b < 3a$  Dreiblatt in Fischchenform
- $3a = b$  Einblatt mit Spitze bei  $x=3a$
- $3a < b$  Einblatt ohne Spitze



**Abb. 9.7 Rosette als Fußpunktkurve der Astroide**  
Buch Abb. 8.22 S. 242

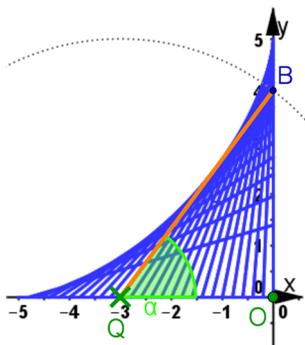
Im Abschnitt 4.4.5.3 und Abb. 4.3.7. b) ist die Astroide als Hüllkurve einer Stange fester Länge zu sehen, deren Enden auf den Achsen wandern. Im genannten Bild wird eine Ellipse erzeugt, links aber wird vom Ursprung aus ein Lot auf die Stange gefällt. Der Fußpunkt dieses Lotes sei  $P$ , an der  $x$ -Achse gespiegelt liegt  $P'$ . Die Ortskurve von  $P$  ist das Quadrifolium, die übliche Vierblatt-Rosette aus Abb. 8.17, wie im Folgenden (im Buch S. 242) bewiesen wird.

Hier ist die Astroide der Rand der grünen Fläche. Ihre Gleichung wird nicht benötigt, denn mit der Stange hat man ja schon die benötigten Tangenten.

**Teil 2, Fußpunktkurven der Astroide, Lösung:** Das Vorgehen lehnt sich sehr an die Handlungsweise bei der Steiner-Kurve an. Alle Rechnungen können Sie ausführlich in der Mathematica-Datei (und deren \*.pdf) afg9.4-astroide.nb auf der Website lesen.

**Implizite kartesische Gleichung der Astroide** In der Parameterdarstellung  $x(\alpha) = -a \cos(\alpha)^3$  und  $y(\alpha) = a \sin(\alpha)^3$  ist  $\alpha$  schon gleich der Tangentenwinkel. So zeigt es Abb. 9.7 im Buch, daher kommt das negative Vorzeichen beim  $x$ -Term.

$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{-a}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{y}{a}}\right)^2 = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ , das Minuszeichen verschwindet durch das Quadrat und es folgt  $\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \left(\sqrt[3]{y^2}\right) = \left(\sqrt[3]{a^2}\right)$  als Gleichung der Astroide. Mathematica kommt mit CubeRoot beim Zeichnen besser zurecht als mit hoch  $\frac{2}{3}$ .



**Abb. 9.8 Astroide und rutschende Leiter**

**S. 269** Die Geraden haben die Gleichung  $y = f(x, \alpha) = \tan(\alpha)x + a \sin(\alpha)$ , wobei  $a$  die Länge der orangefarbenen Leiter ist.

Die partielle Ableitung dieser Gleichung nach  $\alpha$  ist:  
 $0 = \frac{x}{\cos(\alpha)^2} + a \cos(\alpha)$ .

Daraus folgt  $x = -a \cos(\alpha)^3$  und damit in der oberen Gleichung  $y = -a \cos(\alpha)^3 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + a \sin(\alpha) =$

$a \sin(\alpha) \cdot (-\cos(\alpha)^2 + 1)$ , also  $y = a \sin(\alpha)^3$ . Soll der Parameter  $\alpha$ , wie im Bild, die Bedeutung als Tangentenwinkel haben, muss man das Minuszeichen bei  $x$  beibehalten. Mit dem Parameter  $\varphi = \pi - \alpha$  tritt kein Minuszeichen auf.

**Formen der Pedalkurven der Astroide** Abb. 9.9 (hier) Liegt der Pol  $A$  (blau) im Inneren der Astroide ist die Pedalkurve vierblättrig und berührt jeden Astroidenast. Liegt der Pol auf einem Ast, berührt die nun dreiblättrige Kurve die anderen drei Äste. Wandert der Pol nun hinaus, so ist die Pedalkurve zweiblättrig und es werden zunächst wieder alle Äste berührt. Weiter draußen gibt es aber nur noch zwei Berührungen.

**Pedalkurven der Astroide** Die Tangente in  $Q$  hat die Gleichung  $y = \tan(\alpha)(x - x(\alpha)) + y(\alpha)$ . Das Lot von  $A = (c, d)$  auf die Tangente ist dann  $y = -\cot(\alpha)(x - c) + d$ . Die beiden schneiden sich in

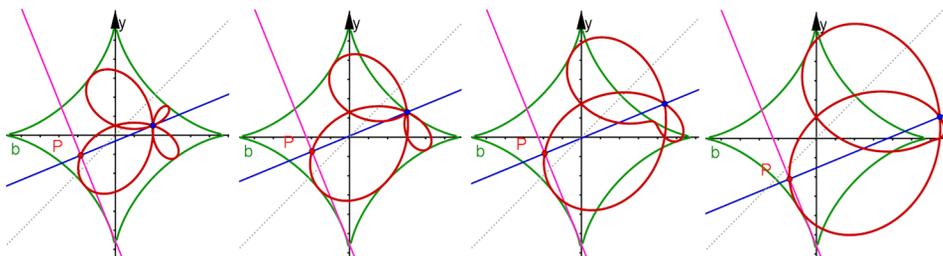
$$S_x = \cos(\alpha)(c \cos(\alpha) + \sin(\alpha)(d - a \sin(\alpha))) \text{ und } S_y = \frac{1}{2} \sin(\alpha)(a \cos(2\alpha) + a + 2c \cos(\alpha) + 2d \sin(\alpha)).$$

Mit der Parameterdarstellung  $S = (S_x, S_y)$  ergeben sich schon die Pedalkurven. Hiermit ist die interaktive Darstellung auf der Website gebaut.

Wieder mit obiger Substitution und Eliminate erhält man dann, wie zu erwarten, eine Gleichung 6. Grades.

$$a^2(c - x)^2(d - y)^2 = ((c - x)^2 + (d - y)^2)(x(c - x) + y(d - y))^2 \quad (9.5)$$

**Pedalkurven der Astroide und dem Pol  $A = (c, d)$ .**



**Abb. 9.9 Aufgabe 9.4 Pedalkurven der Astroide** Die Bilder zeigen, wie sich die Pedalkurven verändern, wenn der (blaue) Pol  $A$  von innen nach außen wandert.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.1.3 Negative Fußpunktkurven

#### Aufgabe 9.5 Fußpunktkurve der Tschirnhaus-Kubik

Bauen Sie die Konstruktion von Abb. 9.4.b) nach – oder nehmen Sie sie von der Website zum Buch – und erkunden Sie, für welche Stellung des Pols  $A$  sich anstelle der roten Schlaufenkurve die grüne Parabel als Fußpunktkurve ergibt.

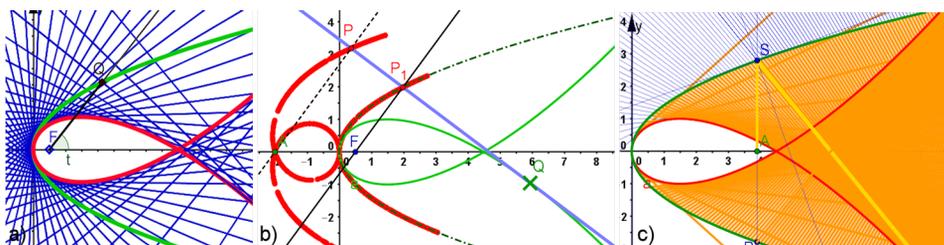
Überlegen Sie, warum man auf diese Weise **immer** von der negativen Fußpunktkurve zu der Ausgangskurve zurückkehren kann. Dies rechtfertigt den Namen **negative Fußpunktkurve**.

Sehen Sie im Abschnitt 4.2.1.1 nach, zu welchem Typ die Tschirnhaus-Kubik gehört. Vergleichen Sie mit den Abb. 4.13 und 4.14.

Machen Sie sich klar, dass die Kurve rechts *keine* Asymptote hat.

#### Hinweis

Verwenden Sie die implizite Gleichung 9.7 der Tschirnhaus-Kubik. ◀



**Abb. 9.10 Aufgabe 9.5 Fußpunktkurven der Tschirnhaus-Kubik** a) Die Parabel hat als negative Pedalkurve mit dem Brennpunkt als Pol die Tschirnhaus-Kubik, b) Unter den Pedalkurven der Tschirnhaus-Kubik ist auch die Ausgangsparabel Parabel, weiter siehe Abb. 9.11 (hier), c) Die Tschirnhaus-Kubik entsteht auch als Kaustik (Brennlinie) an einer Parabel, wenn Licht senkrecht zur Parabelachse einfällt und an der konkaven Seite der Parabel reflektiert wird.

**Ergänzung: Gleichung der Tschirnhaus-Kubik** Herleitung der Gleichung 9.7 im Buch  $54py^2 = (9p - 2x)^2x$ . Im Buch konnte dieses aus Platzgründen auf Seite 264 nur angedeutet werden. Wir gehen also von der Parabel  $y^2 = 2px$  aus, der Punkt  $Q = (u, v)$  erfüllt dann die Gleichung  $v^2 = 2pu$ . Als Pol wählen wir  $A = (c, d)$ . Dann ist aus Abb. 9.10 a) (hier) ersichtlich, dass die Steigung der Geraden  $AQ$  den Wert  $\frac{v-d}{u-c}$  hat. Damit hat die Senkrechte auf  $AQ$  in  $Q$  die Gleichung  $y = \frac{c-u}{v-d}(x-u) + v$ .

Im Folgenden betrachten wir  $d = 0$ , wie wir es für die Aufgabe brauchen. Wir schränken damit aber die Allgemeinheit ein. Ersetzen wir nun  $u = \frac{v^2}{2p}$  aus dem Weg für  $Q$ , so haben wir die Gleichung der Geradenschar in Abhängigkeit vom Parameter  $v$ , deren Hüllkurve die Tschirnhaus-Kubik ergeben soll. **Auf der Website finden Sie eine Mathematica-Datei \*.nb und eine lesbare \*.pdf-Version dieser und aller folgenden Rechnungen.**

Für die Hüllkurve wählen wir, weil ja schon nach  $y$  aufgelöst ist, die Extremum-Methode aus Abschnitt 9.2.3. Die Ableitung nach  $v$  führt auf  $-\frac{c}{2p} - \frac{cx}{v^2} + \frac{3v^2}{4p^2} - \frac{x}{2p} + 1 = 0$ . Evident kommt ausschließlich  $v^2$  vor, wir substituieren  $v^2 = z$  und verwenden Solve. Das Ergebnis ist ziemlich länglich und es wird einfacher, wenn wir, wie für die Tschirnhaus-Kubik nötig,  $c = \frac{p}{2}$  setzen. Dann folgt nämlich  $v^2 = z = \frac{px}{3}$  oder  $v^2 = z = -p^2$ . Die zweite Gleichung ist für echte Parabeln unerfüllbar. Das erste  $v^2$  wird also in die Gleichung der Geradenschar eingesetzt. Die führt zu  $y = \frac{x(9p-2x)^2}{\pm 3\sqrt{6}\sqrt{px}}$  und Quadrierung ergibt die oben behauptete Gleichung 9.7.

**Pedalkurven der Tschirnhaus-Kubik interaktiv** Auf der Website sind zwei GeoGebra-Dateien dazu verfügbar. Die erste setzt  $Q_1$  zugfest auf die Parabel (die ja eigentlich als Sonderfall erst herauskommen soll), nimmt eine Senkrechte auf  $FQ_1$  in  $Q_1$ , die nach Obigem Tangente an die Tschirnhaus-Kubik ist. Ein Pol  $A=(c,d)$  wird gewählt, zunächst auf der x-Achse. Im Abb. 9.10 b) (hier) zeigt dieses für  $d = 0$ . Der Weg des Fußpunktes des Lotes auf die Tangente kann in dieser Konstruktion als **Ortskurve** erhalten werden, weil GeoGebra mit der Parabel als Weg für  $Q_1$  besser zurechtkommt, als wenn  $Q$  auf der implizit gegebenen Kubik läge.

Die andere GeoGebra-Datei nimmt die Definition der Pedalkurven ernst und setzt  $Q$  auf die Tschirnhaus-Kubik, wie es Abb. 9.10 b) wirklich zeigt. Dafür hat man die Ortslinie nur noch als Spur von  $P$ . Bemerkenswert ist, dass man für  $Q$  in den Extrema der Kubik keinen Spurpunkt  $P$  erhalten kann. In den Rechnungen ist dann das Lot parallel zur y-Achse und nicht in der Form  $y = \dots$  erfasst. Aber  $x = c$  für das Lot und  $y = \pm p$  für die Tangente ergeben zulässige Punkte der Pedale der Tschirnhaus-Kubik.

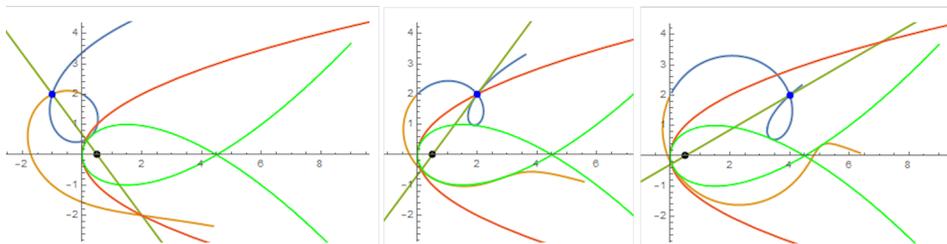
**Pedalkurve der Tschirnhaus-Kubik für  $A = F = (\frac{p}{2}, 0)$**  Als implizite Ableitung erhalten wir  $108ppy' = 81p^2 - 72px + 12x^2$  und damit als Tangente durch  $Q = (u, v)$  auf der Tschirnhaus-Kubik  $54pv^2 = u(9p - 2u)^2$  nun tang:  $y = \frac{(27p^2 - 24pu + 4u^2)(x-u)}{36pv} + v$ .

Das Lot von  $A = (\frac{p}{2}, 0)$  auf die Tangente ist damit lot:  $y = -\frac{(x-\frac{p}{2})(36pv)}{27p^2 - 24pu + 4u^2}$  Mit dem  $v$  aus Solve  $[54pv^2 = u(9p - 2u)^2, \{v\}]$  eingesetzt in Tangente und Lot ergibt sich (mit CAS) aufgelöst nach  $x$  und  $y$  nun die Parameterdarstellung  $x = u/3, y = \sqrt{2/3}\sqrt{p}\sqrt{u}$ . Elimination von  $u$  ergibt, wie erwartet, die Ausgangsparabel  $y^2 = 2px$ .

**So kann man immer zurückkehren** Zu einer Kurve  $C$  ergibt sich zu einem Pol  $A$  eine einzige negative Fußpunktkurve (Contra-Pedalkurve)  $C_N$ . Für  $Q \in C$  ist die Senkrechte auf  $AQ$  in  $Q$  Tangente an  $C_N$ . Diese hat i.A. einen einzigen Berührungspunkt  $B$  mit  $C_N$ . Das Dreieck  $AQB$  erhalten wir auch, wenn von  $B \in C_N$  ausgehen und auf der Tangente an  $C_N$  bis zum Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf die Tangente gehen. Dieser Punkt  $Q$  hat also die Kurve  $C$  als Ortskurve.

**Andere Pole für Pedalkurven der Tschirnhaus-Kubik** Die Lote drehen sich bei Bewegung von  $B$  um  $A$ . Daher haben andere Punkte eines momentanen Lotes zwar momentan denselben Fußpunkt, verlieren diese Eigenschaft aber sofort, wenn  $B$  wandert. Andere (feste) Pole  $A'$  haben momentan parallele Lote auf die Tangente, wie man in Abb. 9.10 b) (hier) deutlich sieht. Die mit ihnen erzeugten Pedalkurven sind aber verschieden von

C. Dieses zeigt die interaktive Mathematica-Datei, die man aus der Website vorfindet. Abb. 9.11 b) (hier). Für die Herleitung einer Parameterdarstellung dieser allgemeinen Pedalkurven müssen schon ziemlich ausgefeilte Methoden von Mathematica verwendet werden.



**Abb. 9.11 Aufgabe 9.5 Pedalkurve der Tschirnhaus-Kubik (grün) mit beliebigen Polen (blau)** Die Gerade durch Pol und Brennpunkt der Ausgangsparabel trifft die Schnittpunkte von Parabel und Pedale.

**In Newtons System der Kubiken** Man erkennt sofort den **Newtonschen Knoten**, zu dem das Polynom  $f$  3. Grades mit  $f(x) = \frac{1}{27p} \left(\frac{9}{2}p - x\right)^2 x$  durch den Ursprung und mit der doppelte Nullstelle  $x = \frac{9}{2}p$  gehört. Beim Übergang  $f(x) \rightarrow y^2$  (dem Wurzelziehen) wird diese zum Doppelpunkt und rechts kann keine Asymptote entstehen, weil das Polynom keine solche hat.

Darüber hinaus ist wegen der „Affenkasten“-Eigenschaften in Abschnitt 4.2.3 Seite 95 im Buch klar, dass die Extrema der Tschirnhaus-Kubik bei  $x = \frac{3}{2}p$  liegen. Die zugehörige Ordinate ist übrigen  $p$ , damit stimmen die Sperrung der Parabel und die Dicke der Schlaufe der Kubik überein.

**Die Tschirnhaus-Kubik als Kaustik** Tschirnhaus selbst hatte diese Erzeugung eine Kubik vorgestellt. In Abb. 9.10 c) (hier) ist das Vorgehen vorgestellt, die zugehörige GeoGebra-Datei ist auf der Website. Rechnungen dazu habe ich noch nicht angestellt, man bräuchte die Geradenschar der gespiegelten Strahlen in Abhängigkeit von einem Parameter.

## **9.2 Enveloppen, Evoluten, Involuten, Evolventen**

### **9.2.1 Hüllkurven allgemein**

### **9.2.2 Naum-Gabo-Kurven und grundlegendes Vorgehen**

### **9.2.3 Parabel als Hüllkurve mit der Extremum-Methode**

### **9.2.4 Astroide und die rutschende Leiter**

## **9.3 Evoluten als Hüllkurven von Normalenscharen**

### **9.3.1 Evolute einer Parabel**

### **9.3.2 Kurvenpaare vom Typ: Involute und Evolute**

### **9.3.3 Evolventen und Parallelkurven**

## **9.4 Reflexion und Kaustiken**

# In: Kurven erkunden und verstehen

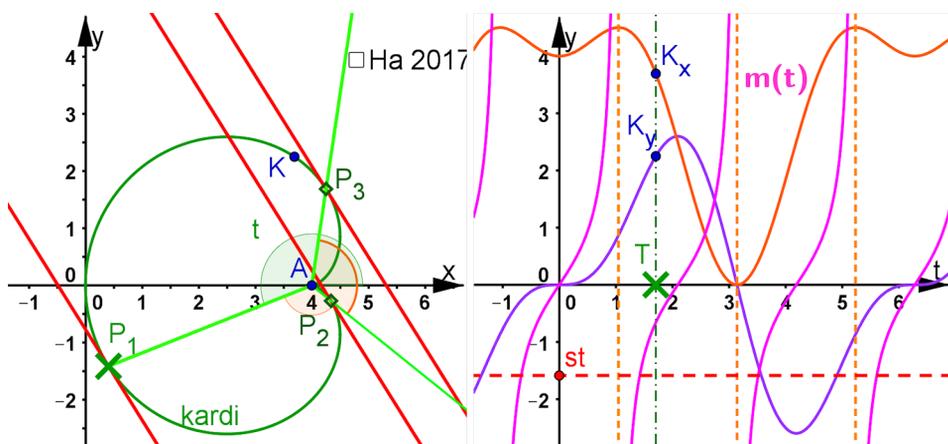
Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.4.1 Kardioiden, die Herzkurve

### 9.4.1.6 Kardioiden, Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 9.6 Die drei Tangenten

Betrachten Sie einen Punkt  $P_1$  der Kardioiden und die Tangente in  $P_1$ . Zeigen Sie, dass es zwei weitere zu ihr parallele Tangenten der Kardioiden gibt. Werden ihre Berührungspunkte mit  $P_2$  und  $P_3$  bezeichnet, so bilden die Geraden  $AP_1$ ,  $AP_2$  und  $AP_3$  Winkel von  $120^\circ$  miteinander. In der Polardarstellung 3.5 gibt es also einen drehenden „Mercedes“-Stern, an dessen Schnittpunkten mit der Kardioiden alle drei Tangenten parallel sind. Bauen Sie eine Datei, die das zeigt, beweisen Sie es, wenn Sie mögen.



**Abb. 9.12 Aufgabe 9.6 Die drei Tangenten**

In der Aufgabe ist (versehentlich) nicht formuliert, dass der Punkt  $A$  die Spitze (der 3-fach-Punkt) der Kardioiden sein soll. Dieser Punkt ist auch Scheitel des Winkels  $t$ , der in der Parameterdarstellung (s.u.) als Parameter fungiert. Das rechte Bild ermöglicht das Verstehen und Beweisen aller Beobachtungen.

**Grundlage und Panne bei der Bezeichnung** Zunächst verwenden wir die Parameterdarstellung 9.16 im Buch Seite 278.

$$\text{als Epitrochoide, Gl. 8.13} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{a}{3} (2 \cos(t) - \cos(2t)) + a \\ y(t) = \frac{a}{3} (2 \sin(t) - \sin(2t)) \end{cases} \quad (9.6)$$

Wie in der Legende zu Abb. 9.12 (hier) schon erwähnt habe ich versehentlich die Bezeichnungen aus Abb. 9.22) S. 276 im Buch nicht aufgegriffen. Das dortige  $A = (a, 0)$ , der Mittelpunkt des Wanderkreises, gibt seine Abszisse  $a$  in die eben genannte Formel. Das dortige  $B$ , der Baum, ist das  $A$  in der hier gezeigten Abb. 9.12.

**Berechnung der Nullstellen der Kardioide** Mit  $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$  erhalten wir aus  $y = 0$  nun  $0 = 2 \sin(t)(1 - \cos(t))$ . Wie erwartet  $t = 0$  und  $t = \pi$  als Parameter der Nullstellen der Kardioide und Abzissen sind  $x(0) = \frac{a}{3}(2 - 1) + a = \frac{4}{3}a$  und  $x(\pi) = \frac{a}{3}(-2 - 1) + a = -a + a = 0$ . Da in der Abb. 9.12 (hier)  $a = 3$  gewählt ist, passen diese Ergebnisse.

**Der Stern der parallelen Tangenten** Wir verwenden für die Steigung die Formel

$m(t) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$  (im Buch Formel 11.3 S. 217). Die Ableitungen nach  $t$  sind:

$$\dot{x} = \frac{a}{3}(-2 \sin(t) + 2 \sin(2t)) \text{ und } \dot{y} = \frac{a}{3}(2 \cos(t) - 2 \cos(2t)).$$

Für die Steigung haben wir damit die Funktion  $m(t) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{-\sin(t) + \sin(2t)}$ . Diese ist Abb. 9.12 rechts hellviolett dargestellt und hat die etwa die Form der Tangensfunktion. Ihre Äste haben offenbar den waagrecht gemessenen Abstand  $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ . Damit die Behauptung bewiesen, dass drei Parameterwinkel ihre Schenkel in der Mercedes-Stern-Stellung haben und die zugehörigen Tangenten der Kardioide gleiche Steigung aufweisen.

Zur Übung Rechnung dazu:  $\dot{x} = 0$ , also  $\sin(t)(-1 + 2 \cos(t)) = 0$ , im relevanten Intervall sind die Polstellen von  $m(t)$  also  $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ .

**Weitere Erkundung der Kardioide** In der GeoGebra-Datei auf der Website kann man mit Ziehen von  $T$  im zweiten Grafikfenster die Koordinaten eines Kardioidenpunktes  $K$  und im 1. Grafikfenster  $K$  selbst wandern lassen. So zeigt die Abb. 9.12 rechts eine Stellung. Die Maximumstellen der Funktion  $x(t)$  fallen z. B. mit den Polstellen von  $m(t)$  zusammen.

**Das animierte Bild und die Kardioide als Pascalsche Schnecke** Hierfür ist die Kardioide als Polarkurve verwendet mit der Gleichung  $r(\theta) = 2a(1 - \cos(\theta))$ , gespiegelte Formel 3.5 im Buch S. 47. Hier ist  $a$  der Radius des Wanderkreises. Auch hiermit hätten wir obigen Beweis führen können. Aber *ein* Beweis reicht.

**Implizite kartesische Gleichungen** Für die Kardioide aus Abb. 9.12 muss man für die Elimination wieder substituieren  $c = \cos(t)$ ;  $s = \sin(t)$  und  $c^2 + s^2 = 1$  mitführen. Damit ergibt sich, wie Sie in der Mathematica-Datei (und deren \*.pdf) sehen können,  $x(4a - 3x)^3 = 9y^2(4a^2 - 12ax + 6x^2 + 3y^2)$  als Gleichung der Kardioide mit Scheitel im Ursprung und Spitze in  $(\frac{4}{3}a, 0)$

Für die Kardioide im animierten Bild auf der Website ist die implizite kartesische Gleichung;  $4a^2(x^2 + y^2) = (2ax + x^2 + y^2)^2$ , nach Gleichung 3.6 im Buch, an der  $y$ -Achse gespiegelt und  $k = 2a$  gesetzt.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

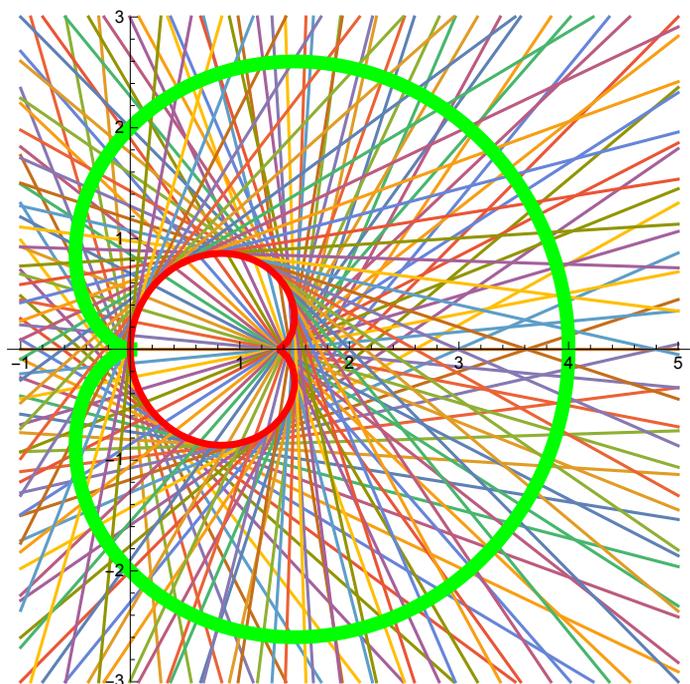
### 9.4.1.6 Kardioide, Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 9.7 Evolute der Kardioide

Konstruieren Sie die Evolute der Kardioide. Vergleichen Sie mit der Evolute der Nephroide in Abb. 9.15 im Buch S. 283.

#### Hinweis

Lassen Sie sich von dem Vorgehen bei der Nephroide leiten. Übrigens ist dort in Aufgabe 8.8 und Abb. 9.16 auch die **Katakaustik der Kardioide** mit der Lichtquelle in der Spitze gezeigt. ◀



**Abb. 9.13 Aufgabe 9.7 Evolute der Kardioide** Die Evolute als Hüllkurve der Normalen erscheint als **Kardioide in dreifacher Verkleinerung** innerhalb der Ausgangskurve.

**Lösung mit der Kardioide als Pascal'sche Schnecke** Für die Erzeugung in GeoGebra habe ich mich für die Lage und Gleichung als Pascal'sche Schnecke entschieden, um noch einen anderen Zugang als in Aufgabe 9.6 zu zeigen. Die Polargleichung ist  $r(t) := 2a \cos(t) - 2a$  und daher  $r'(t) = -2a \sin(t)$ . Wegen Gleichung 11.15 im Buch ist die Tangentensteigung  $m'(t) = \frac{-2a \sin(t) \sin(t) + (2a \cos(t) - 2a) \cos(t)}{-2a \sin(t) \cos(t) - (2a \cos(t) - 2a) \sin(t)} = \tan\left(\frac{3t}{2}\right)$ . Die letzte nette Zusammenfassung liefert Mathematica.

Die Normalenschar mit dem Parameter  $t$  ist daher  
 $n[x_] := -\text{Cot}[(3 t)/2] (x - r[t] \text{Cos}[t]) + r[t] \text{Sin}[t]$  in Mathematica-Syntax.  
 Dieses und weiteres können Sie in der Mathematica-Datei (und ihrer \*.pdf) auf der Website lesen. Eine Tabelle mit 50 solcher Normalen ist zusammen mit der grünen Ausgangs-Kardioide in Abb. 9.13 (hier) gezeichnet.

**Die Evolute ist die Hüllkurve dazu** Ich habe sie als ein Drittel so groß geraten. Ihr Scheitel ist nun im Ursprung und die Spitze bei  $\frac{4a}{3}$  mit dem  $a = 1$  und der in der Aufgabe 4.6 hergeleiteten Formel  $x(4a - 3x)^3 = 9y^2 (4a^2 - 12ax + 6x^2 + 3y^2)$  der Kardioide in dieser Ausrichtung. So ist sie rot eingezeichnet und passt (nach Sicht).

Eine Herleitung der Hüllkurve ist mir bisher weder mit der Polardarstellung noch mit der impliziten Gleichung der Kardioide gelungen. Auch in Mathematica werden die Term „wild“.

# In: Kurven erkunden und verstehen

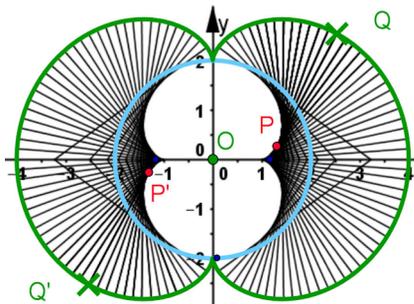
Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.4.2 Nephroide, die Nierenkurve

### 9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 9.8 Evolute der Nephroide ist auch eine Nephroide

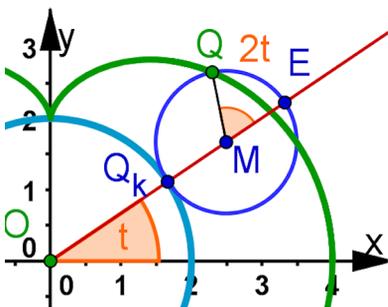
Die Aufgabe ich neben Abb. 9.14 (hier) formuliert.



**Abb. 9.14** Evolute der Nephroide

**Aufgabe:** Konstruieren Sie die Normalenschar (siehe 9.3.2). Die Evolute ist eine um  $90^\circ$  gedrehte, auf die Hälfte verkleinerte Nephroide. Realisieren Sie handwerklich, dass der Berührungspunkt  $P$  die Mitte zwischen  $Q$  und dem einen Schnittpunkt der Normalen mit dem (hellblauen) Grundkreis ist. Im Bild sind die Normalen nur bis zur  $x$ -Achse gezeichnet und die untere Hälfte ist durch Punktspiegelung am Ursprung erzeugt.

**Lösung** Grundlage sei die Parameterdarstellung  $x(t) := \frac{a}{2} (3 \cos(t) + \cos(3t))$  und  $y(t) := \frac{a}{2} (3 \sin(t) + \sin(3t))$  aus Gleichung 9.18 auf S. 281 im Buch. Sie ist eine Folge der Auffassung der Nephroide als Epitrochoide aus Abb. 8.28 und Gleichung 8.13 im Buch S. 247.



**Abb. 9.15** Aufgabe 9.8 Nephroide waagrecht,

**Bedeutung von  $t$**  Bei der hier genannten Parameterdarstellung ist die waagrecht orientierte Nephroide als Epitrochoide aufgefasst. Der Parameter  $t$  ist der Winkel zwischen der  $x$ -Achse und dem Strahl  $OM$ , mit dem Rollkreismittelpunkt  $M$ . Diese entspricht der Abb. 9.13 c) im Buch, das  $P_z$  dort ist hier  $Q$  und  $E$  auf dem Rollkreis und dem Strahl ist zum besseren Verständnis eingefügt.  $t = 0$  liegt  $E$  Scheitel der Nephroide und hat dann die Koordinaten  $(2a, 0)$ . Der Radius hellblauen Rastkreises um  $O$  ist hier  $a$ .

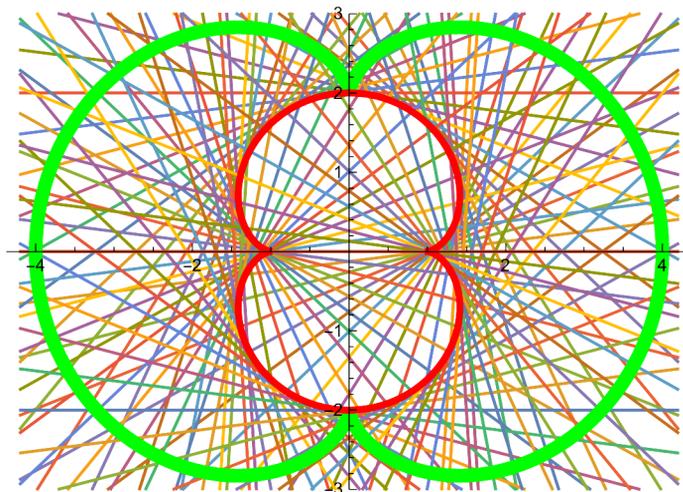
**Implizite kartesische Gleichung der Nephroide** Wieder substituieren wir  $c = \cos(t)$  und  $s = \sin(t)$ . Nun müssen wir die Parameterdarstellung mit diesen Termen schreiben  $\cos(3t) = c^3 - 3cs^2$  und  $\sin(3t) = -s^3 + 3c^2s$ . Mit  $\text{Eliminate}[\{x==a/2(3c+c^3-3cs^2), y==a/2(3s-s^3+3c^2s), s^2+c^2==1\}, \{s, c\}] \backslash \backslash \text{FullSimplify}$  folgt als Gleichung der Nephroide

$$4a^6 + 3a^4(5x^2 - 4y^2) + 12a^2(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 + y^2)^3. \quad (9.7)$$

**Schnitte mit den Achsen** Aus der kartesischen Gleichung erhalten wir mit  $y = 0$  die rechte und die linke Scheitelstelle  $x = \pm 2a$  als einfache Nullstellen. Mit  $x = 0$  ergeben sich die Ordinaten der beiden Spitzen  $y = \pm a$ , jeweils dreifach.

**Ableitungen nach  $t$  mit kartesische Tangentensteigung** Es gilt  $\dot{x}(t) = \frac{1}{2}a(-3 \sin(t) - 3 \sin(3t))$  und  $\dot{y}(t) = \frac{1}{2}a(3 \cos(t) + 3 \cos(3t))$  und daher  $m(t) = -\frac{\cos(t)+\cos(3t)}{\sin(t)+\sin(3t)}$ . In Abb. 9.24 a) (hier) ist in Blau diese Funktion  $m$  gezeichnet, sie ist  $\frac{\pi}{2}$ -periodisch. Zu jeder Richtung gibt es vier parallele Tangenten. **Als Zusatz wird das Tangentenquartett** unten betrachtet.

**Die Normalen mit Parameter  $t$**  Ihre Gleichung ist  $y = \frac{\sin(t)+\sin(3t)}{\cos(t)+\cos(3t)}(x - x(t)) + y(t)$ . Aus 100 solchen Normalen ist Abb. 9.16 (hier) für  $a = 2$  entstanden. Zusätzlich ist dort die Ausgangs-Nephroide in Grün und die Hüllkurve in Rot eingezeichnet.



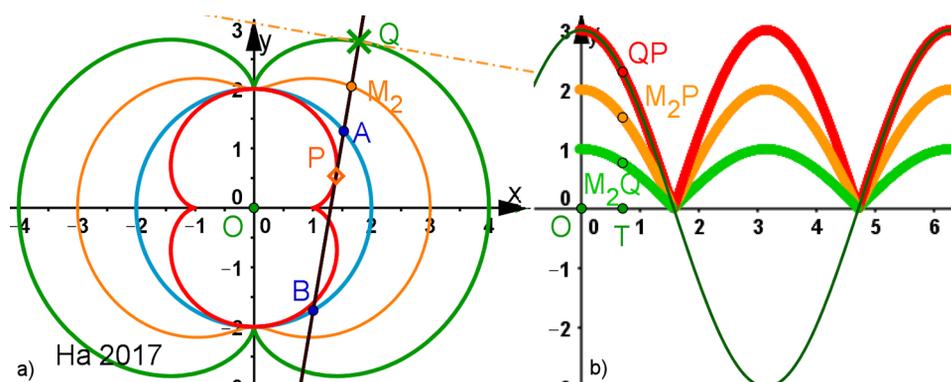
**Abb. 9.16 Evolute der Nephroide**  
**Aufgabe:** Konstruieren Sie die Normalenschar (siehe 9.3.2). Die Evolute ist eine um  $90^\circ$  gedrehte, auf die Hälfte verkleinerte Nephroide. Hier sind die Normalen mit Mathematica ohne Einschränkungen gezeichnet.

**Fazit** Die Hüllkurve der Normalen, also die Evolute der Nephroide, ist nach Sicht auch eine Nephroide und zwar in halber Größe und aufrecht. In Rot ist die Nephroide  $x(t) := \frac{a}{4}(3 \cos(t) - \cos(3t))$  und  $y(t) := \frac{a}{4}(3 \sin(t) - \sin(3t))$  mit  $a = 2$  eingetragen. Die Minuszeichen sorgen für die aufrechte Stellung.

Berechnungen zur Hüllkurve führen auch tatsächlich zu dieser „kleinen Nephroide“ mit der impliziten Gleichung  $a^6 + 3a^4(5y^2 - 4x^2) + 48a^2(x^2 + y^2)^2 = 64(x^2 + y^2)^3$ . Das ist in der Mathematica-Datei (und ihrer \*.pdf) bewiesen. Aus der oben genannten impliziten Nephroidengleichung entsteht diese durch Tausch von  $x$  und  $y$  und Ersetzen von  $a$  durch  $\frac{a}{2}$ .

**Mitteneigenschaft von  $P$**  Handwerklich liegt der Berührungspunkt  $P$  tatsächlich auf der Mitte zwischen  $Q$  und dem einen Schnittpunkt der Normalen mit dem (hellblauen) Grundkreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = a^2$ .

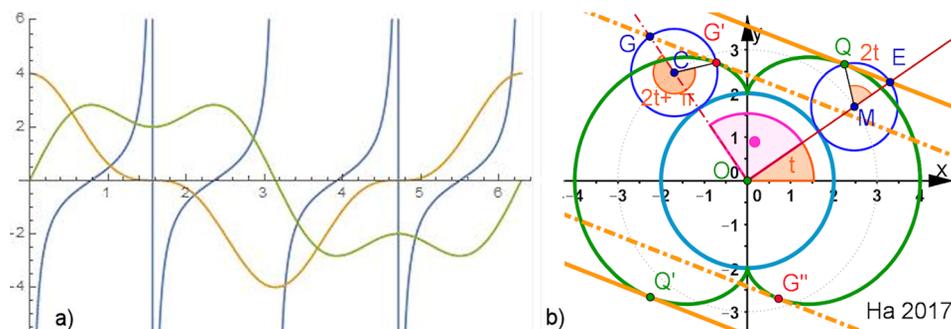
Für eine konstruktive Überprüfung, wie sie in Abb. 9.24 b) gezeigt ist, wurde in der zweiten GeoGebra-Datei zu dieser Aufgabe zu  $Q$  auf der Nephroide Tangente und Nor-



**Abb. 9.17** Kleine Nephroide als Mittenort und Abstände a) Die Normale in  $Q$  schneidet den Grundkreis in  $A$  und  $B$ . Die Mitte von  $\overline{QB}$  hat auch die halb so große aufrechte Nephroide als Ortskurve.

b) **Weitere Erkenntnisse** ergeben sich aus Aufgabe 9.11. Der Abstand  $\overline{QP}$  ist  $|\frac{3}{2} \cos(t)|$ , zusammengesetzt aus  $\overline{M_2Q} = |\frac{1}{2} \cos(t)|$  und  $\overline{M_2P} = |\cos(t)|$ . Dieses ist im 2. Grafikkfenster dargestellt.

male konstruiert und letztere mit dem Kreis zum Schnitt gebracht. Die Strecke von  $Q$  zu dem weiter entfernten Schnittpunkt  $B$  wird von  $P$  halbiert und die Ortskurve von  $P$  bei Bewegung von  $Q$  ist tatsächlich auch die halb so große und aufrechte Nephroide, also auch die Evolute. In der Mathematica-Datei wird dieser Weg rechnerisch nachvollzogen. Dabei zeigt sich, dass die Ortskurve von  $P$  *wirklich* die Evolute der Nephroide ist. Offensichtlich ist die Ortskurve von  $M_2$  keine Nephroide. Sie ist aber auch keine „verkürzte Epitrochoide“, denn sie berührt den Rastkreis, was die verkürzten Epitrochoiden nicht tun, wie Abb. 8.28 d) zeigt.



**Abb. 9.18** Nephroide und ihr Tangentenquartett a) Die Funktionen vom Parameter  $t$ :  $m(t)$  blau,  $x(t)$  ocker,  $y(t)$  oliv, b) Eine Senkrechte auf dem „Parameterstrahl“ von  $Q$  erzeugt den Parameterstrahl von  $G'$ . Dann sind die Tangenten von  $Q$  und  $G'$  an die Nephroide parallel. Zwei weitere Parallelen entstehen durch Punktspiegelung.

**Zusatz: Das Tangentenquartett**

Die Abb. 9.18 a) (hier) beweist, dass die Steigungsfunktion  $\frac{\pi}{2}$ -periodisch ist. Im Hinblick auf Aufgabe 9.6 müsste es sich hier ein „drehen-

des Tangentenquartett“ handeln. Bevor wir das aber sehen können, müssen wir uns in die Bedeutung des Parameters  $t$  vertiefen, wie es in Abb. 9.15 (hier) dargestellt ist. In Abb. 9.18 b) (hier) wird diese Erkenntnis ausgenutzt. Der Parameter  $t$  ist der Winkel, um den sich der Rollkreismittelpunkt von der waagerechten Ausgangslage aus gedreht hat. Der Wälzwinkel im Rollreis ist dann bei der Nephroide  $2t$ . Wächst  $t$  um  $\frac{\pi}{2}$ , wird der Wälzwinkel  $2t + \pi$ . Die Tangenten in den beiden zugehörigen Punkten  $Q$  und  $G'$  an die Nephroide sind also parallel. Durch Punktspiegelung am Ursprung sind  $Q'$  und  $G''$  mit ihren Tangenten erzeugt. In der GeoGebra-Datei auf der Website können Sie durch Ziehen an dem Schieberegler  $t$  das Tangentenquartett drehen, stets bleibt der violette rechte Winkel  $\angle EOG$  erhalten.

**Beobachtung:** Die Tangenten schneiden anscheinend den Rollkreis in dem Punkten  $E$  und  $G$ . Können Sie das beweisen?

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

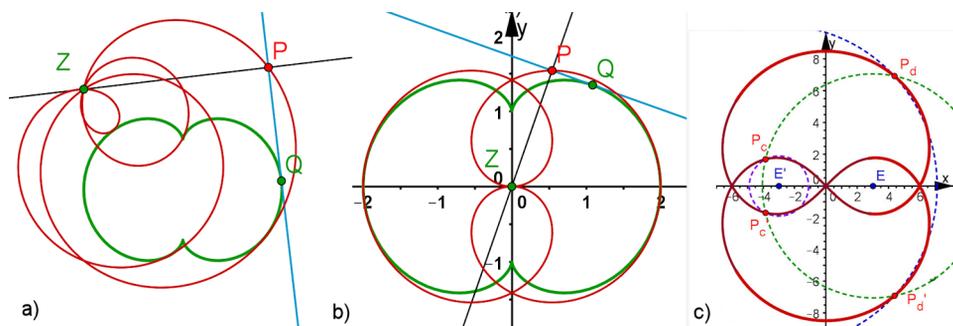
### 9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 9.9 Fußpunktkurve der Nephroide mit dem Pol $Z$

Konstruieren Sie die Fußpunktkurve zur Nephroide bezüglich eines beliebigen Punktes  $Z$ . Verwenden Sie nicht nur die Spur, sondern auch die Ortslinie. Ziehen Sie nun an  $Z$ . Wenn  $Z$  im Ursprung liegt, erhalten Sie eine Kurve mit zwei nach innen gerichteten Schlaufen. So ähnlich ist die bipolare Kurve in Abb. 4.20 a) a). Vergleichen Sie.

**Lösung** Wie bei den vorigen Aufgaben zur Nephroide wird die Parameterdarstellung verwendet:  $x(t) := \frac{a}{2} (3 \cos(t) + \cos(3t))$  und  $y(t) := \frac{a}{2} (3 \sin(t) + \sin(3t))$  aus Gleichung 9.18 auf S. 281 im Buch.

**Tangenten und Lote** Wie bei der vorigen Aufgabe ist die Tangente in  $Q$  nun  $\text{tang}(t) = t \csc(t) (a - \frac{1}{2}x \cos(2t) \sec(t)) = -\cot(2t)x + \frac{a}{\sin(t)}$ . Die Lote von  $Z = (p, d)$  auf die Tangente haben daher eine ganz einfache Gleichung:  $\text{lot}(t) = \tan(2t)(x - p) + d$



**Abb. 9.19** Aufgabe 9.9 Nephroide und ihre Pedalkurven a) beliebiger Pol  $Z$ , b)  $Z = (0, 0)$ , c) Cassinische Kurve passt nicht

**Schnittpunkt von Tangente und Lot** Alle Rechnungen finden Sie ausführlicher und der Mathematica-Datei (und ihrer \*.pdf) auf der Website. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten  $xs = (\frac{1}{2} \sin(4t)(a \csc(t) - d + p \tan(2t))$ , und  $ys = \tan(2t) (\frac{1}{2} \sin(4t)(a \csc(t) - d + p \tan(2t)) - p) + d$ . Mit der nun schon gewohnten trigonometrischen Auflösung und der Substitution  $s = \sin(t)$  und  $c = \cos(t)$  schafft Mathematica  $s$  und  $c$  zu eliminieren. Es ergibt sich die Gleichung für die Pedalkurven der Nephroide zu  $4a^4(d - y)^2 ((d - y)^2 + (x - p)^2) - 4a^2 ((d - y)^2 + (x - p)^2) (y(y - d) + x^2 - xp)^2 + (y(y - d) + x^2 - xp)^4 = 0$ . Wir haben wegen der 8 möglichen Schnittpunkte mit einer Geraden eine Kurve 8. Grades erwartet.

Legen wir den Pol auf die x-Achse, wird die Gleichung etwas übersichtlicher, insbesondere, wenn man von Hand noch etwas nacharbeitet.

$$4a^2 ((x - p)^2 + y^2) (a^2 y^2 - (-px + x^2 + y^2)^2) + (-px + x^2 + y^2)^4 = 0$$

als Gleichung für Pedalkurven der Nephroide mit Pol auf der x-Achse.

**Pol im Ursprung** Setzen wir nun auch noch  $p = 0$  erhalten wir

$$4a^2 \left( a^2 y^2 - (x^2 + y^2)^2 \right) + (x^2 + y^2)^3 = 0.$$

Hierbei haben wir einen Faktor  $(x^2 + y^2)$  weglassen können. Er sagt nur, dass der Ursprung erreicht wird. Das ist bei der reduzierten Kurve auch klar.

Ganz offensichtlich hat diese Kurve in Abb. 9.19 b) (hier) waagrechte Tangenten im Ursprung, das aber ist bei der bipolaren Kurve Abb. 9.19 c) (hier) nicht der Fall.

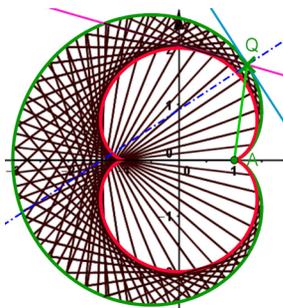
## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 9.10 Kaustik der Kardioide ist die Nephroide

Es gibt eine überraschende Verwandtschaft zwischen Kardioide und Nephroide. Die Aufgabe ich neben Abb. 9.20 (hier) formuliert.



**Abb. 9.20** Eine Kaustik der Kardioide ist die Nephroide

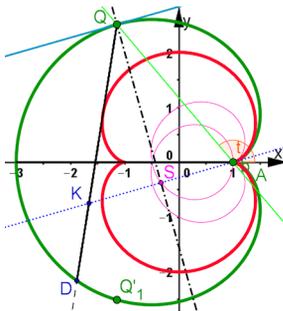
**Aufgabe:** Zeichnen Sie eine Kardioide als Parameterkurve nach Gleichung 9.16 ohne das  $+a$ . Konstruieren Sie zu einem zufestgen Punkt  $Q$  Tangente und Normale. Das Bild der Geraden  $AQ$  bei Spiegelung an der Normalen ist der reflektierte Strahl. Auf ihm definieren Sie eine Strecke, deren Spur die Nephroide zum Vorschein bringt. Raten Sie die Nephroidengleichung und prüfen Sie durch Einzeichnen. Wenn Sie mögen, leiten Sie die Gleichung her. Die unteren Strecken erhält man durch Spiegeln der oberen an der  $x$ -Achse.

**Lösung** Im Bild neben der Aufgabenstellung sind die zunächst geforderten Taten verwirklicht. Wie immer ist die zugehörige GeoGebra-Datei auf der Website. In der genannten Parameterdarstellung  $x(t) = \frac{a}{3}(2\cos(t) - \cos(2t))$  und  $y(t) = \frac{a}{3}(2\sin(t) - \sin(2t))$  ist der Parameter  $t$  der Winkel, den die positive  $x$ -Achse mit  $AQ$  bildet. Damit ergibt sich die Spitze zu  $A = (\frac{a}{3}, 0)$  und der linke Scheitel in dem Bild ist  $(-a, 0)$ .

**Geratene Nephroide** Bei Nephroiden ist der Durchmesser durch die Spitzen  $2a_n$  und der durch die Scheitel  $4a_n$ . Die implizite kartesische Gleichung der Nephroide, wie sie in der Aufgabe 9.8 zur Evolute hergeleitet wurde, ist

$$4a_n^6 + 3a_n^4(5x^2 - 4y^2) + 12a_n^2(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 + y^2)^3.$$

Hier ist ersichtlich  $a_n = \frac{a}{3}$ . In Abb. 9.20 (hier) ist sie in Rot eingetragen.



**Abb. 9.21** Aufgabe 9.10 Nephroide als Kaustik der Kardioide

In GeoGebra ist mit dem Tangenten-Button und dem für Senkrechtenkonstruktion, der Spiegelung von  $AQ$  an der Senkrechten und der Spur auf der gespiegelten Geraden schon alles getan.

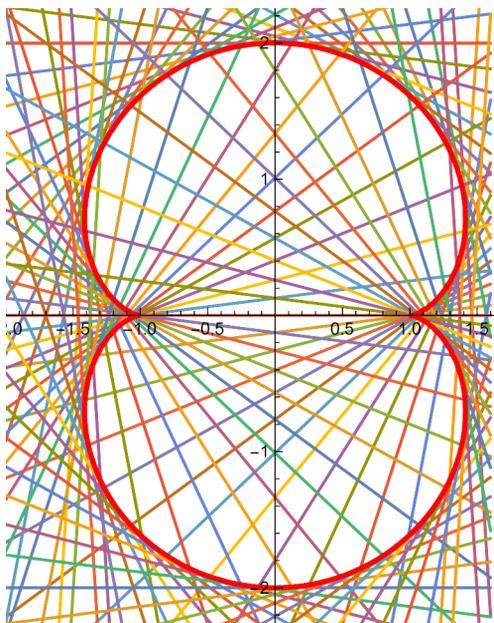
Die **Idee für einen rechnerischen Beweis** ist folgende: Zu  $Q$  auf der Kardioide werden die Tangentensteigung und die Gleichung der Normalen, die als Einfallslot dient, bestimmt. Das Lot von  $A$  auf die Normale hat den Fußpunkt  $S$ , die Spiegelung von  $A$  an  $S$  liefert  $K$ . Die Schar der Geraden  $QK$ , oder Ausschnitte davon, erzeugen als Hüllkurve die Nephroide. Siehe Abb. 9.22 (hier)

**Tangenten und Normale in  $Q$**  Die implizite kartesische Gleichung der abgebildeten Kardioide ist  $(a - 3x)^3(a + x) + 18(a^2 - 3x^2)y^2 = 27y^4$ . Man erhält sie mit der üblichen,

in den vorigen Aufgaben beschriebenen, Substitution und Elimination. So lässt sich die Kardioide schnell zeichnen, aber für unser Vorhaben ist die Parameterdarstellung praktischer. Mit  $m(t) = \frac{y}{x}$  kommen wir zu  $m(t) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{-\sin(t) + \sin(2t)}$ , das mit FullSimplify von Mathematica zu  $m(t) = \tan(\frac{3t}{2})$  vereinfacht wird. Die Normale in  $Q$ , das Einfallslot, ist daher  $nor(t) = -\cot(\frac{3t}{2})(x - x(t)) + y(t)$ .

**Die Spiegelung** Das Lot von  $A$  auf die Normale ist offenbar parallel zur Tangente in  $Q$  und hat daher die Gleichung  $lot(t) = m(t)(x - 1)$ . Für den Schnitt von Lot und Normale muss man wieder trigonometrisch auflösen und substituieren. Es ergeben sich nach FullSimplify und Rücksubstitution  $xs = \frac{1}{6}a(\cos(t) + \cos(2t) - \cos(3t))$  und  $ys = \frac{1}{6}a(\sin(t) + \sin(2t) - \sin(3t))$ , Formeln von eindrucksvoller Eleganz. In der Mathematica-Datei (und ihrer\*.pdf) auf der Website können Sie alles ausführlich verfolgen. Mit Eliminate anstelle von Solve bekommt man „gratis“ die Kurve dieses Lotfußpunktes, die auch in Abb. 9.21 (hier) violett eingezeichnet ist.

**Nun bestimmen wir  $K$ :** Als Mitte der Strecke  $\overline{AK}$  gilt  $xs = \frac{1}{2}(\frac{a}{3} + xk)$  und  $ys = \frac{yk}{2}$ . Damit kann  $K = (xk, yk)$  unmittelbar bestimmt werden. Die Gerade  $QK$  hat so die Gleichung  $f(x) = \frac{y(t) - yk}{x(t) - xk}(x - xk) + yk = -\frac{2}{3}a \sec(2t) \sin(t) + x \tan(2t)$



**Abb. 9.22 Aufgabe 9.10 Die reflektierten Strahlen** Wenn Strahlen von  $A$  ausgehen und innen an der Kardioide reflektiert werden, bilden die reflektierten Strahlen als Katakaustik (Brennlinie bei Reflexion) ein Nephroide, deren Parameter  $a_n$  den Parameter  $a$  der Kardioide drittelt. Hier sind 100 Spiegelgeraden durchgehend von Mathematica gezeichnet, aus obigem  $f(x)$  ist eine Tabellen für  $t$  von 0 bis  $2\pi$  in Schritten von  $\frac{\pi}{50}$  erstellt. Die oben genannte Nephroide, die sich im Folgenden auch rechnerisch ergibt in rot eingezeichnet.

**Die Hüllkurve ist die Nephroide** Nach Abschnitt 9.2.2.2 S.267 im Buch leiten wir  $y = f(x)$  nach  $t$  ab. Das ergibt  $0 = \frac{1}{3}(6x - 3a \cos(t) + a \cos(3t)) \sec(2t)^2$ . Mit der Geradenschar und schon üblichen Substitution und Eliminate erhalten wir  $4a^6 + 972a^2(x^2 + y^2)^2 + 27a^4(-4x^2 + 5y^2) = 2916(x^2 + y^2)^3$ . Wenn wir in der oben genannten Gleichung der Nephroide für  $a_n$  das  $\frac{a}{3}$  einsetzen, erhalten wir genau dieselbe Gleichung.

## In: Kurven erkunden und verstehen

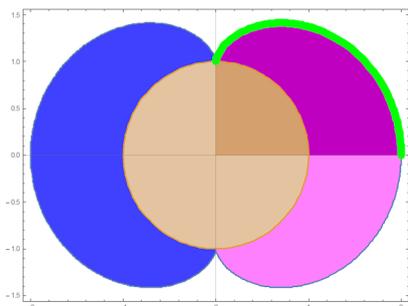
Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.4.2.4 Nephroide, Weiterführungen und Aufgaben

#### Aufgabe 9.11 Analysisfragen bei der Nephroide

Wie schon bei Astroide und Kardioiden lassen sich auch bei der Nephroide Flächen und Bogenlänge berechnen. Weisen Sie für die Nephroide mit dem Grundkreisradius  $a$  das Folgende nach:

1. Die Fläche der Nephroide ist  $A = 3\pi a^2$ . Die „Möndchen“ außerhalb des hellblauen Grundkreises in Abb. 9.14 sind so groß wie der Grundkreis.
2. Die Bogenlänge der Nephroide ist  $L = 12a$ , das sind *drei* Grundkreis-Durchmesser auf jeder Seite.
3. Die Strecke  $\overline{PQ}$  ist aufgrund der definierenden Zusammenhänge der Krümmungsradius  $\varrho(t)$ . Weisen Sie  $\varrho(t) = \left|\frac{3a}{2} \sin(t)\right|$  nach.



**Abb. 9.23 Aufgabe 9.11 Nephroide und Analysis**

Es ist  $a$  der Radius des Kreises.

Zu 1.: Das dunklere Viertel im 1. Quadranten wird unten durch ein Parameterintegral berechnet.

Der blaue und der violette Mond haben jeder die Fläche  $a^2\pi$  des Kreises.

Zu 2.: Auch die Bogenlänge wird auch auf Grundlage der Parameterdarstellung berechnet. Jedes Möndchen hat außen einen Rand der Länge  $6a$ , das sind drei Grundkreisdurchmesser.

Zu 3. gibt es unten die Abb. 9.24 (hier).

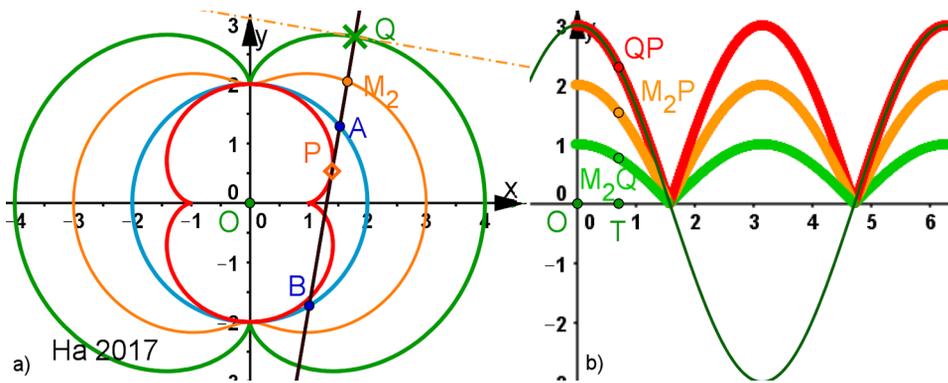
**Lösung zu 1., Flächen** Wie bei den vorigen Aufgaben zur Nephroide wird die Parameterdarstellung verwendet:  $x(t) := \frac{a}{2} (3 \cos(t) + \cos(3t))$  und  $y(t) := \frac{a}{2} (3 \sin(t) + \sin(3t))$  aus Gleichung 9.18 auf S. 281 im Buch. Zur Bedeutung des Parameters gibt die Lösung zu Aufgabe 9.8 die Abb. 9.15 (hier). Damit ist klar, dass wir die Fläche mit Formel 11.19 aus  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{y} \cdot x \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cdot \dot{x} \, dt$  berechnen können. Die erste Art ist hier günstiger.  $A = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos(t) - 3 \cos(3t)) \cdot (3 \cos(t) + \cos(3t)) dt = 3a^2\pi$ .

Klar *kann* man das auch „von Hand“ rechnen, mit mehrfachen partiellen Integrationen und Substitutionen oder, nach einigen Umformungen, dem Nachsehen in einer Formelsammlung, etwa dem Bronstein. Es kann mir aber niemand erklären, dass die dafür eingesetzten Stunden einen „höheren Wert“ haben, zumal die Formelsammlung ja letzten Endes nur ein „verschriftlichter Computer“ ist.

**Lösung zu 2., Bogenlänge** Für die Bogenlänge greift die Formel 11.15  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$ . Betrachten wir den Radikanden:  $\frac{a^2}{4} \cdot 9(-\sin(t) - \sin(3t))^2 + \frac{a^2}{4} \cdot 9(\cos(t) + \cos(3t))^2 = 9a^2 \cos(t)^2$ , das liefert Mathematica mit FullSimplify. Daraus kann man im Kopf die

Wurzel ziehen, insgesamt folgt für die ganze Bogenlänge  $s = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 12a$ , wie behauptet.

**Lösung zu 3., Krümmungsradius** Wir greifen auf Aufgabe 9.8 zur Evolute der Nephroide zurück. Eine Evolute ist ja nicht nur die Hüllkurven der Normalenschar, sondern auch der Ort der Krümmungskreismittelpunkte. Zudem haben wir in der genannten Aufgabe bewiesen, dass  $P$  die Mitte zwischen  $Q$  und dem einen Schnittpunkt der Normale mit dem Grundkreis ist. Von dort holen wir nun die Koordinaten von  $P$ . Sie heißen in der Mathematica-Datei `afg9.8-nephroide-evolute.nb` (oder `*.pdf`) `xm1` und `ym1`. Es ist also  $xm1 = -\frac{1}{4}a(\cos(3t) - 3\cos(t))$  und  $ym1 = a\sin(t)^3$ . Das Abstandsquadrat von  $Q$  und  $P$  ist  $qp = \sqrt{(xm1 - x(t))^2 + (ym1 - y(t))^2} = |\frac{3a}{2} \cos(t)|$ .



**Abb. 9.24 Kleine Nephroide als Mittenort und Abstände** a) Die Normale in  $Q$  schneidet den Grundkreis in  $A$  und  $B$ . Die Mitte von  $\overline{QB}$  hat auch die halb so große aufrechte Nephroide als Ortskurve.

b) **Weitere Erkenntnisse** ergeben sich aus Aufgabe 9.11. Der Abstand  $\overline{QP}$  ist  $|\frac{3}{2} \cos(t)|$ , zusammengesetzt aus  $\overline{M_2Q} = |\frac{1}{2} \cos(t)|$  und  $\overline{M_2P} = |\cos(t)|$ . Dieses ist im 2. Grafikkfenster dargestellt.

Diese Abb. 9.16 steht auch in der Lösung zu Aufgabe 9.8 zur Evolute der Nephroide. Dort wurde die Mitteneigenschaft bewiesen. Der Abstand  $\overline{QP} = \frac{3}{2}|a \cos(t)|$  ist das erwartete Ergebnis, wenn die Nephroide waagrecht liegt und die Evolute senkrecht. Denn für  $t = 0$  kommt der größte Abstand zustande, mit wachsendem  $t$  fällt er bei  $t = \frac{\pi}{2}$  auf 0.

In der Aufgabe steht , der Abstand sei  $\frac{3}{2}|a \sin(t)|$ . Dabei ist offenbar die aufrechte Form für die Ausgangs-Nephroide gemeint, die eine waagerechte Nephroide als Evolute hat. Mit deren Parameter  $\hat{t}$  beginnt der Abstand mit 0 und wächst auf  $\frac{3}{2}a$  für  $\hat{t} = \frac{\pi}{2}$ . Formal ist, wie auf Seite 281 ausgeführt,  $\hat{t} = t - \frac{\pi}{2}$  und damit  $|\cos(t)| = |\cos(\hat{t} + \frac{\pi}{2})| = |\sin(\hat{t})|$ .

### 9.4.3 Reflexionen an beliebigen Kurven

## 9.5 Inversion am Kreis

### 9.5.1 Erste Erfahrungen mit der Kreisspiegelung

### 9.5.2 Inversion von Kurven

### 9.5.3 Kartesische Abbildungsgleichungen

### 9.5.4 Anallagmatische Kurven

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben

### Aufgabe 9.12 Inversion an einem Scheitel von Ellipse und Hyperbel

Die allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte in einer x-Achsen-symmetrischen Lage und dem Scheitel in  $M = (m, 0)$ , bzw. im Ursprung ist gemäß Gleichung ???:

$$y^2 = 2p(x - m) - (1 - \varepsilon^2)(x - m)^2 \quad \text{bzw.} \quad y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2 \quad (9.8)$$

Bauen Sie mit Schieberegler für  $p$  und  $\varepsilon$  Urbilder gemäß der rechten obigen Gleichung 9.8 und invertieren Sie mit dem Button für die Kreisspiegelung. Stellen Sie eine Vermutung an, um welche Kurvenfamilie es sich handelt. Ist es die in Abb. ?? oder die aus Abb. ??? Leiten Sie eine Gleichung der Inversionsbilder her. Denken Sie über die Asymptoten und den Definitionsbereich für  $x$  bei der Bildkurve nach.

#### Hinweis

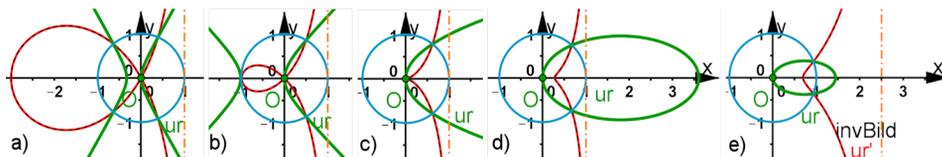
Gleichung der Inversionsbilder ist  $(c - x)y^2 = x^2(x + c(\varepsilon^2 - 1))$  mit  $c = \frac{k^2}{2p}$ . ◀

**Lösung** Für die Inversion an einem Ursprungskreis mit dem Radius  $k$  sind nach Gleichung 9.22 auf Seite 291 im Buch die Ersetzungen vorzunehmen:

$\text{invert} = \left\{ x \rightarrow \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, y \rightarrow \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \right\}$ . Nach Beseitigung der Nenner  $x^2 + y^2$  kann man erhalten

$\varepsilon^2 (k^2 x - m(x^2 + y^2))^2 = (x^2 + y^2) (k^4 - 2k^2 x(m + p) + m(m + 2p)(x^2 + y^2))$ . So ist das nicht übersichtlich, aber in dem Sonderfall  $m = 0$ , der hier zu untersuchen ist, folgt  $k^2 \varepsilon^2 x^2 = (k^2 - 2px)(x^2 + y^2)$ . Das passt schon fast zur Gleichung der **Konchoiden des Barons de Sluze** neben Bild 5.8 Seite 143 im Buch. Mit  $c = \frac{k^2}{2p}$  erhalten wir nämlich  $(c - x)(x^2 + y^2) = -c \varepsilon^2 x^2$ , eine Sluze-Kurve.

Sortiert man das nach  $x^2$ - und  $y^2$ -Termen, so folgt gleich  $(c - x)y^2 = (x + c\varepsilon^2 - c)x^2$ , eine **Cissoide** nach Gleichung 3.17 auf Seite 69 im Buch.



**Abb. 9.25 Aufgabe 9.12 Inversion der Kegelschnitte in Scheitellage** Bei a) bis d) ist  $k = 1, p = \frac{1}{2}, c = 1$ . Mit  $\varepsilon = 2$  zeigt a) die Trisektris, mit  $\varepsilon = \sqrt{2}$  zeigt b) die Strophoide, mit  $\varepsilon = 1$  zeigt c) die Cissoide des Diokles als Bild der Parabel. Mit  $\varepsilon = 0.85$  zeigt d) das Bild einer Ellipse. Bei e) ist weiter  $k = 1$  und  $\varepsilon = 0.85$ , das Bild dieser kleineren Ellipse mit  $p = 0.2$  hat aber  $c = 2.5$ . Die Asymptote ist stets  $x = c$ .

In Abb. 9.25 ist gezeigt, für welche Werte der Parameter  $p$  und  $\varepsilon$  der Kegelschnitt in Scheitellage beim Invertieren am Einheitskreis (Radius  $k = 1$ ) in eine Trisektris, eine Strophoide und eine Cissoide des Diokles übergeht. Diese drei klassischen Kurven sind auf

Seite 143 im Buch auch schon als gemeinsame Kurven vom Sluze-Typ und Cissoiden-Typ nachgewiesen. Auch in Aufgabe 5.5 Seite 144 widmet sich diesem Zusammenhang.

**Nicht alle Sluze-Kurven treten als Inversionsbilder von Kegelschnitten auf** Für den Parameter  $p$  braucht man hier nur positive Werte zu betrachten. Für negative  $p$  erhält man der  $y$ -Achse gespiegelte Formen und damit auch lediglich gespiegelte Inversionsbilder. Da  $c = \frac{k^2}{2p}$  also positiv ist, ist auch  $c\varepsilon^2 > 0$ , das Minuszeichen in der Kurvengleichung bleibt erhalten. Das hat zur Folge, dass die Sluze-Kurven mit  $a \geq 0$  nicht auftreten können. Also kommen die Bögen auf der anderen Seite der Asymptote nicht als Inversionsbilder von Kegelschnitten in Scheitellage vor.

**Nicht alle Cissoiden-Variationen aus Gleichung 3.17 von Seite 69 im Buch treten als Inversionsbilder von Kegelschnitten auf** Abb. 3.23 im Buch zeigt i.W. die vorkommenden Cissoiden-Variationen. Ockerfarben sind links etliche, die man in der GeoGebra-Datei zur Inversion der Kegelschnitte nicht beobachten kann. Kandidaten für diese sind allenfalls Hyperbeln mit ihren Punkten links der  $y$ -Achse, da wir nur positive  $p$  betrachten. Die Inversion hat ja Urbild und Bild in demselben Quadranten. Hyperbeln aber haben unendlich ferne Punkte, daher müssen ihre Inversionsbilder den Ursprung erreichen. Die Cissoiden in Abb. 3.23 im Buch sind für  $a = 2$  gezeichnet. Sie erfüllen für  $c = 0$  die Gleichung  $(x + 4)x^2 = -xy^2$ . Dieses wird erfüllt von der Geraden  $x = 0$  und dem Kreis  $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ . Für negative  $c$  erreicht die stetige Kurve den Ursprung nicht mehr. Wie oben schon überlegt, können negative  $c = \frac{k^2}{2p}$  nicht auftreten. Aber  $c = 0$  ist auch nicht möglich, da  $k = 0$  keine Inversion bietet und  $c$  nur für  $p \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt.

**Definitionsbereiche** Alle Hyperbeln, die ihren rechten Scheitel im Ursprung haben, werden invertiert zu einer Schlaufe mit der rechten Asymptote  $x = \frac{k^2}{2p}$  und mit Knoten im Ursprung. Da die Äste ins Unendliche reichen, muss das auch so sein. Der Scheitel des Knotens ist das Bild des linken Hyperbelscheitels. Er liegt bei  $x_0 = \frac{k^2(1-\varepsilon^2)}{2p}$ , also im Negativen für Hyperbeln, im Positiven bei Ellipsen, die nur einen bogenförmigen Ast als Bild haben. Bei Parabeln entsteht eine Spitze im Ursprung. Nur zwischen diesem Wert und der Asymptote gibt es Bildpunkte.

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben

### Aufgabe 9.13 Inversion am Brennpunkt von Ellipse und Hyperbel

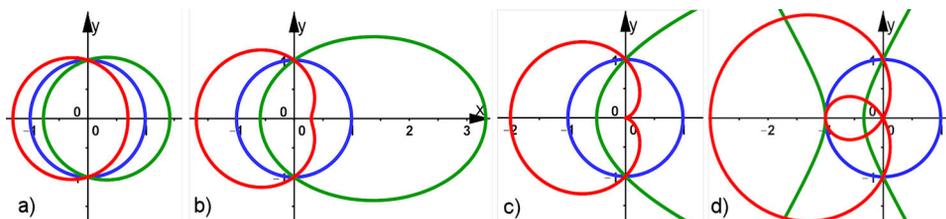
Wenn der Brennpunkt im Ursprung liegt, gibt es für die Kegelschnitte die allgemeine

$$\text{Polargleichung in Brennpunktlage} \quad r(\theta) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\theta)} \quad (9.9)$$

Bauen Sie mit Schieberegler für  $p$  und  $\varepsilon$  Urbilder und invertieren Sie mit dem Button für die Kreisspiegelung. Stellen Sie eine Vermutung an, um welche Kurvenfamilie es sich handelt. Leiten Sie eine Gleichung der Inversionsbilder her. Beobachten Sie die Veränderung der Urbilder und Bilder bei Variation von  $\varepsilon$ .

#### Hinweis

Eine kartesische Gleichung ist  $(x^2 + y^2 - 2c\varepsilon x)^2 = 4c^2(x^2 + y^2)$  ◀

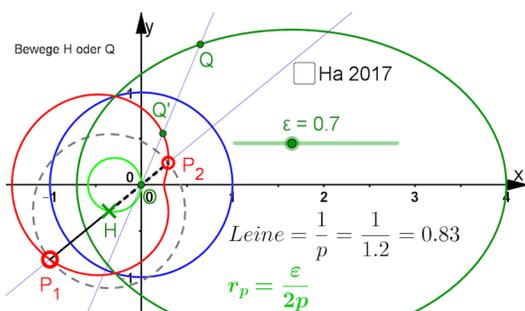


**Abb. 9.26 Aufgabe 9.13 Inversion der Kegelschnitte am Brennpunkt** Zu sehen ist der blaue Einheitskreis, an dem der grüne Kegelschnitt (mit  $p = 1$ ) invertiert wird. Das Ergebnis ist die rote Pascalsche Schnecke. a) Ellipse mit  $\varepsilon = 0.3$ , zweiter Brennpunkt dicht an  $O \rightarrow$  Oval, b) Ellipse mit  $\varepsilon = 0.7$ , zweiter Brennpunkt weiter außen  $\rightarrow$  Oval mit Einbuchtung, c) Parabel,  $\varepsilon = 1 \rightarrow$  Kardioide d) Hyperbel mit  $\varepsilon = 2 \rightarrow$  Pascal'sche Schnecke mit Schlaufe.

**Lösung Aufgabe 9.13** Wenn eine Polargleichung mit Pol  $O$  existiert, wie es hier der Fall ist, erhält man für die Inversion an einem Kreis mit dem Radius  $k$  die Kehrwertgleichung  $r_i(\theta) = \frac{k^2}{r(\theta)}$ . Das heißt schon gleich, dass man o. B. d. A. den Radius des Inversionskreises  $k = 1$  setzen kann. Alle anderen Radien ergäben lediglich mit  $k^2$  gestreckte Bilder.

Hier ist also mit  $k = 1$  nun  $r_i(\theta) = \frac{1 - \varepsilon \cos(\theta)}{p} = \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p} \cos(\theta)$ . Vergleich mit Gleichung 3.5  $r_p(\theta) = 2a \cos(\theta) \pm k_p$  von Seite 47 im Buch ergibt, dass es sich um Pascalsche Schnecken handelt, deren Wanderkreis den Radius  $a = \frac{\varepsilon}{2p}$  hat und bei der die Leinenlänge  $k_p = \frac{1}{p}$  ist. Abb. 9.27 ist der Wanderkreis und zu einem  $Q$  auf dem Kegelschnitt auch sein Bild  $P$  und das zugehörige  $H$  auf dem Wanderkreis eingezeichnet.

Wenn bei einer Pascal'schen Schnecke die Leinenlänge gleich dem Durchmesser des Wanderkreises ist, erreicht man die Kardioide. Hier ist das also der Fall für  $\frac{1}{p} = k_p = 2a = \frac{\varepsilon}{p}$ , also für  $\varepsilon = 1$ , die Parabel. Dies ist schon in Abschnitt 9.5.2.3 erwähnt.

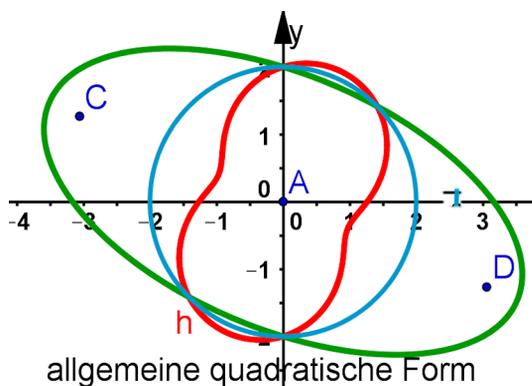


**Abb. 9.27 Aufgabe 9.13 Inversion Brennpunktlage mit Pascal'scher Schnecke** Hier kann man sich überzeugen, dass tatsächlich die Pascal'sche Schnecke mit ihrer definition als Konchoide mit Herrchen  $H$  und Wanderkreis (hellgrün) auch passt.

**Herleitung der kartesischen Gleichung** Mit der Grundgleichung 2.6  $r = \frac{x}{\cos(\theta)}$  ergibt sich aus der in der Aufgabe genannten Polargleichung beim Lösen nach  $r$  sofort  $r = p + \varepsilon x$  und damit  $x^2 + y^2 = (p + \varepsilon x)^2$  als **kartesische Gleichung aller Kegelschnitte in Brennpunktlage**. Man sieht für  $x = 0$  kommt die Ordinate des Brennpunktes  $y = \pm p$  heraus, wie es sein muss.

Wenden wir nun die kartesischen Inversionsgleichungen 9.22 von Seite 291 an, so erhalten wir zunächst  $\frac{k^4}{x^2 + y^2} = \left(p + \varepsilon \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}\right)^2$  und schließlich  $k^4(x^2 + y^2) = (p(x^2 + y^2) + k^2 \varepsilon x)^2$ . Mit  $c = \frac{k^2}{2p}$  erreicht man fast die im Hinweis angegebene Gleichung. Mit  $x \rightarrow -x$  spiegelt man noch an der  $y$ -Achse in die Lage der Pascalschen Schnecken aus Abb. 3.6 von Seite 47 im Buch.

**Zusatz: Allgemeiner Kegelschnitt und sein Bild** In Abschnitt 9.5.3.1 auf Seite 293 im Buch ist die allgemeine quadratische Form der Kegelschnitte angegeben und mit den Inversionsgleichungen am Kreis um  $O$  mit Radius  $k^2$  invertiert. Dieses ermöglicht die GeoGebra-Datei „9.13-inv-quadrat-form-all.ggb“.



**Abb. 9.28 Aufgabe 9.13 Zusatz: Allgemeiner Kegelschnitt und sein Bild** Jeder beliebige, gedrehte, verschobene oder entartete Kegelschnitt kann mit seinen Parametern realisiert und invertiert werden.

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.5.5 Inversion der Kegelschnitte als Aufgaben

### Aufgabe 9.14 Inversion am Mittelpunkt von Ellipse und Hyperbel

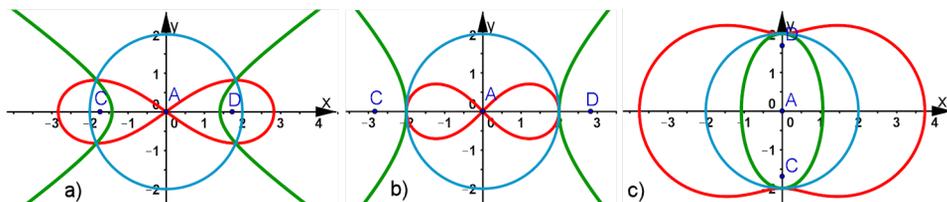
Mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  von Ellipse und Hyperbel gilt:

$$\text{Mittelpunktsgleichung} \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9.10}$$

Bauen Sie mit Schieberegler für  $a$  und  $b$  Urbilder und invertieren Sie mit dem Button für die Kreisspiegelung. Stellen Sie eine Vermutung an, um welche Kurvenfamilie es sich handelt. Leiten Sie eine Gleichung der Inversionsbilder her. Vergleichen Sie mit Aufgabe 4.7.

#### Hinweis

Eine kartesische Gleichung der Inversionsbilder ist  $(x^2 + y^2)^2 = \frac{k^4}{a^2} x^2 \pm \frac{k^4}{b^2} y^2$ . ◀



**Abb. 9.29 Aufgabe 9.14 Inversion von Kegelschnitte in Mittelpunktslage** a) Urbild Hyperbel  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ , b) Urbild  $x^2 - y^2 = 4$ , c) Urbild  $4x^2 + y^2 = 4$

**Lösung:** Dieses Mal macht die Anwendung der Abbildungsgleichungen 9.23 von Seite 291 keinerlei Mühe, sofort erhält man  $\frac{k^4 x^2}{a^2(x^2+y^2)^2} + \frac{k^4 y^2}{b^2(x^2+y^2)^2} = 1$  und im nächsten Schritt die im Hinweis angegebene Gleichung. Vergleich mit der kartesischen Gleichung 4.31 von Seite 116  $(x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 \pm s^2 y^2$  der Booth'schen Kurven zeigt, dass die **Ellipsen auf Booth'sche Ovale** und die **Hyperbeln auf Booth'sche Lemniskaten** abgebildet werden. Es gilt  $c = \frac{k}{a}$  und  $s = \frac{k}{b}$ .

Speziell zeigt Abb. 9.29 b) die **Bernoulli'sche Lemniskate**, denn bei ihr erscheinen als Ursprungstangenten die beiden Winkelhalbierenden als Bilder der Asymptoten der Hyperbel  $x^2 - y^2 = 4$ . Die Gleichung des Bildes ist  $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ , damit ist im Vergleich mit Gleichung 4.22 von Seite 108 im Buch  $2e^2 = 4$ , also ist liegen die Brennpunkte an den Stellen  $e = \sqrt{2}$  und die Scheitelpunkte sind  $(\pm 2, 0)$ .

Das Bild bei a) ist:  $(x^2 + y^2)^2 = 8x^2 - 16y^2$ , eine Booth'sche Lemniskate.

Das Bild bei c) ist:  $(x^2 + y^2)^2 = 16x^2 + 4y^2$ , ein Booth'sche Oval.

In der GeoGebra-Datei ist für die Urbilder die Quadratische Form  $a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 = 0$  vorgesehen, sie erlaubt auch gedrehte und verschobene Urbild-Kegelschnitte und Sonderfälle.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

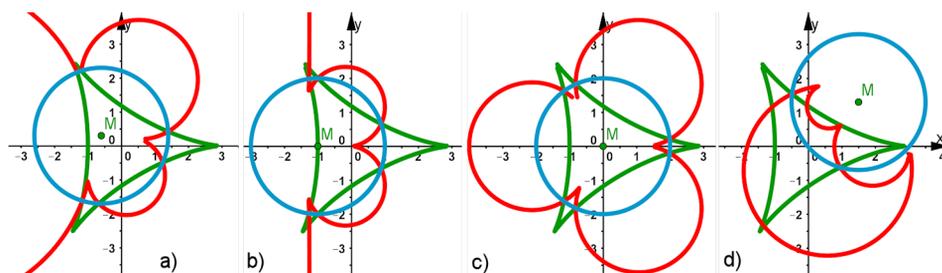
#### Aufgabe 9.15 Steiner-Kurve und ihre Inversion

Die Steiner-Kurve wird auch **Deltoid** genannt. In der aufrechten Form wie in Abb. 9.21 a) ist die Ähnlichkeit mit dem griechischen  $\Delta$  überzeugend. Bei Abb. 9.3 (im Buch) steht die Parameterdarstellung 9.6 als Hypotrochoide und die explizite kartesische Gleichung, die hier günstig ist. Allerdings zeigt dann die obere Spitze nach rechts. Obiges Bild ist lediglich als „Image“ gedreht.

**Anregungen:** Versuchen Sie das gezeigte Bild nachzubauen, sehen Sie sich aber unbedingt auch die inversen Kurven der Steiner-Kurve an, die bei anderen Stellungen von  $M$  und anderen Werten von  $k$  entstehen. Es ist eindrucksvoll, wie diese dynamisch ineinander übergehen.

#### Hinweis

In Abb. 9.21 a) ist  $\varrho = 0.85$  der Rollkreisradius, der Umkreis hat  $R = 3\varrho$ ,  $M = (-1, 0)$  und  $k = 2$ . Die GeoGebra-Datei finden Sie auf der Website zum Buch. ◀



**Abb. 9.30 Aufgabe 9.15 Inversion der Steiner-Kurve** Die Steiner-Kurve ist das „Delta“ in Grün. Je nach Stellung und Radius des Inversionskreises ergeben sich verschiedene Bildkurven. a)  $M = (-0.6, 0.3)$ , b)  $M = (-1, 0)$ , c)  $M = (0, 0)$ , d)  $M = (1.5, 1.3)$

**Implizite kartesische Gleichung der Steiner-Kurve** Mit der Herleitung der kartesischen Gleichung aus der Parameterdarstellung befasst sich ausführlich die Mathematica-Datei `afg9.4-pedal-steiner.nb`, für jedermann zu lesen als pdf-Datei. (In dieser Aufgabe 9.15 auf der Website verlinke ich sie nochmals.) Ich finde es immer wieder überraschend, in welchen unterschiedlichen Gestalten Gleichungen derselben Kurve auftreten können:  $(x-3)^3(\varrho+x)+y^2(18\varrho^2+24\varrho x+2x^2+y^2)=0$ , auch  $(9\varrho^2+12\varrho x+x^2+y^2)^2=4\varrho(3\varrho+2x)^3$  und  $-27\varrho^4+18\varrho^2x^2-8\varrho x^3+x^4+18\varrho^2y^2+24\varrho xy^2+2x^2y^2+y^4=0$  sind solche Varianten der Schreibart für die Steiner-Kurve. GeoGebra zeigt im Algebrafenster die zuletzt gezeigte völlig aufgelöste Form an, mit ihr kann man auch die Übereinstimmungen nachweisen.

**Inversion an einem Kreis um  $M = (a, b)$  mit dem Radius  $k$**  Aus praktischen Gründen heißt bei der Invertierung das Urbild  $P'$  und das Bild  $P$ , damit die endgültige Gleichung

die Striche nicht mehr hat. Es wird nun der Inversionskreis in den Ursprung verschoben und mit ihm  $P' \rightarrow \overline{P}'$ , dann durch die übliche Inversion mit Gleichung 9.22  $\overline{P}' \rightarrow \overline{P}$ , dann zurück  $\overline{P} \rightarrow P$ . Für  $x$  sind das nacheinander die Ersetzungen  $x' \rightarrow \overline{x}' + a \rightarrow \frac{k^2 \overline{x}}{\overline{x}^2 + \overline{y}^2} + a \rightarrow \frac{k^2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} + a$ . Entsprechend  $y' \rightarrow \frac{k^2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} + b$ .

**Lösung von Aufgabe 9.15** Die Aufgabe fordert lediglich die Beschaffung der Inversionen der Steiner-Kurve. Das geht bekanntlich leicht mit dem Button Kreisspiegelung. So sind in GeoGebra die Bilder aus Abb. 9.30 (hier) erzeugt. Da die Steiner-Kurve zu den drei Achsen durch  $O$  und eine Spitze symmetrisch ist, lohnt es sich zu überlegen, mit welchen Stellungen von  $M$  man „alle Fälle“ sehen kann.  $M$  nur auf die x-Achse zu setzen, reicht offenbar nicht. Wie ist es mit  $M$  in einem Sektor zwischen der positiven x-Achse und der Geraden  $y = \sqrt{3}x$ ? Was ist zu bemerken, wenn der Inversionskreis ganz außerhalb der Steiner-Kurve liegt?

**Implizite kartesische Gleichung der invertierten Steiner-Kurve** Die oben hergeleiteten Ersetzungen führen mit Mathematica und dem FullSimplify zu:

$$\left( \frac{k^2 (-2a(a-x+6) + 2b(y-b) + k^2 + 12x)}{(a-x)^2 + (b-y)^2} + a(a+12) + b^2 + 9 \right)^2$$

$$= 4 \left( 2 \left( \frac{k^2(x-a)}{(a-x)^2 + (b-y)^2} + a \right) + 3 \right)^3$$

Von Hand ist das nicht empfehlenswert. Der der Knecht tut es klaglos.

In der Mathematica-Datei afg9.15-inv-steiner.nb und der zugehörigen \*.pdf-Datei, die sich auf der Website befinden, können Sie sich überzeugen, dass diese „wilde“ Formel richtig ist. Die Bilder aus Abb. 9.30 (hier) erscheinen nun „selbst“ gerechnet. Natürlich hat GeoGebra intern ebenso diese erweiterten Inversionsgleichungen. Eine übersichtliche Gestaltung der Terme, wie sie oben von „FullSimplify“ vorgenommen wurde, ist nicht nötig bei der Darstellungsgeschwindigkeit heutiger Computer. GeoGebra löst, wie oben gesagt immer vollständig zu Polynomtermen in  $x$  und  $y$  auf.

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

#### Aufgabe 9.16 Cassini'sche Kurven und ihre Inversion

Den bipolaren Kurven ist der große Abschnitt 4.3 gewidmet. Die beiden Abstände  $r$  und  $r'$  eines Kurvenpunktes von den beiden **Brennpunkten** erfüllen stets eine bestimmte Gleichung. Definition 4.3 auf Seite 99 im Buch zeigt die reichhaltigen Möglichkeiten. In dieser Aufgabe soll  $r'$  die dort erklärte Bedeutung behalten und wir nennen den Polarradius der invertierten Kurve jetzt  $r_i$  und den Radius des Inversionskreises  $k_i$ . Es gilt also  $r \cdot r_i = k_i^2$ . In den Polargleichungen dieser Aufgabe ist dann  $r$  durch  $\frac{k_i^2}{r_i}$  zu ersetzen, **Fehlerteufel: Im Buch steht fälschlich ein Quadrat im Nenner!** Alle in der Definition 4.3 genannten Kurven sind bezüglich der *Inversion ergiebig*. Wir nehmen uns hier die **Cassini'schen Kurven** vor.

Zum Zeichnen eignet sich Gleichung 4.19 auf Seite 103 im Buch, aber für rechnerische Überlegungen ist die implizite Polargleichung 4.20 günstiger. Experimentieren Sie mit der Inversion der Cassini'schen Kurven.

**Abb. ?? b)** im Buch (oder 9.32 b) hier) zeigt anscheinend das Inversionsbild um  $90^\circ$  gedreht gegenüber dem Urbild. Berechnen Sie für festes  $e$  und  $k_i$ , ob es ein  $k$  gibt, für das diese Konstellation auftritt. Dann wäre diese spezielle Cassini'sche Kurve anallagmatisch i. w. S. Überlegen und prüfen Sie, welche grünen Kurvenstücke in welche roten übergehen.

**Abb. ?? c)** (oder 9.31 b) hier) zeigt die Inversion einer Cassini'schen Kurve, die **fast** auf dem Urbild liegt. Gibt es eine oder mehrere anallagmatische Cassini'sche Kurven? Nennen Sie eine (möglichst umfassende) Beziehung zwischen den Kurvenparametern  $k$  und  $e$ , für die es garantiert *keine* anallagmatischen Kurven gibt.

Variieren Sie, z.B. bei festem  $k_i$  und auch festem  $e$ , die Form der Cassini'schen Kurven, beobachten Sie das inverse Bild und achten Sie auf  $k = e$ . Beweisen Sie möglichst Ihre besondere Beobachtung auf irgendeine Weise.

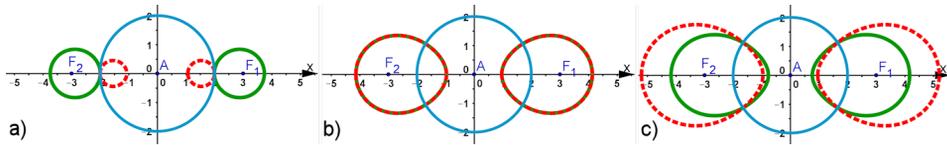
#### Hinweis

Auf der Website zum Buch finden Sie die GeoGebra-Dateien und die Beweise. ◀

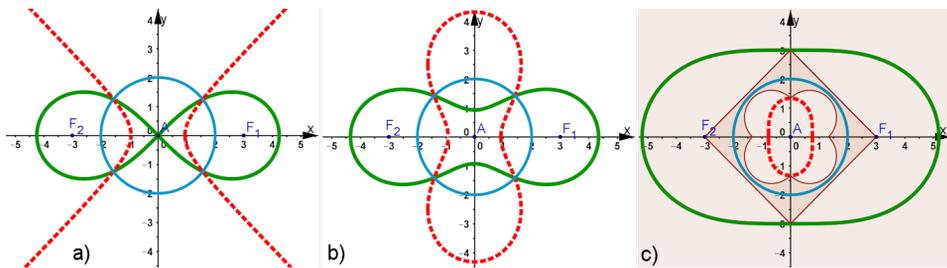
**Lösung: Berechnung der Inversion der Cassini'schen Kurven** Wir gehen an die Gleichung  $(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = k^4 - e^4$  mit den Inversionsgleichungen  $x \rightarrow \frac{k_i^2 x}{x^2 + y^2}$  und  $y \rightarrow \frac{k_i^2 y}{x^2 + y^2}$  heran. Der erste Term wird durch Kürzen schön einfach:  $k_i^8 \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right)^2 - 2e^2 k_i^4 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = k^4 - e^4$  und es geht weiter mit  $\frac{k^4 - e^4}{k_i^4} (x^2 + y^2)^2 + 2e^2(x^2 - y^2) = k_i^4$ .

**Suche nach anallagmatischen Fällen für  $k > e$**  In diesem Fall ist der Faktor vor dem ersten Summanden positiv. Tauschen wir im zweiten Summanden  $x$  und  $y$  so wird er:  $-2e^2(x^2 - y^2)$ . Hier liegt die Wurzel dafür, dass die Bildkurven für aufrecht stehen. Vollständige Übereinstimmung erreichen wir, wenn  $\frac{k^4 - e^4}{k_i^4} = 1$ , also bei einer Inversion mit dem Radius  $k_i$ , der  $k_i^4 = k^4 - e^4$  erfüllt. Bei der Bilderserie hier sind einheitlich

$e = 3$  und der Inversionsradius  $k_i = 2$  festgehalten. Bei Abb. 9.32 b) ist  $k = \sqrt[4]{k_i^4 + e^4} = \sqrt[4]{2^4 + 3^4} = 3.14$  eingestellt. Dieses ist die beiden „Katzenzungen“ sind also kongruent und dieses ist damit ein **anallagmatischer Fall i. w. S.**



**Abb. 9.31 Aufgabe 9.16 Inversion der Cassini'schen Kurven  $k < e$**  Für alle gilt  $e = 3$  und  $k_i = 2$ . Dann ist bei a)  $k = 2.24$  Berührung des Inversionskreises, b)  $k = 2.84$  echt anallagmatischer Fall, c)  $k = 2.9$  Für größer werdende  $k$  wandern die äußeren Scheitel nach außen



**Abb. 9.32 Aufgabe 9.16 Inversion der Cassini'schen Kurven  $k \geq e$**  Für alle gilt  $e = 3$  und  $k_i = 2$ . Dann ist bei a)  $k = 3$  Bernoulli'sche Lemniskate mit der rechtwinkligen Hyperbel als Bild, b)  $k = 3.14$  anallagmatischer Fall i. w. S., c)  $k = 4.24$ , von diesem  $k$  an haben die Cassini'schen Kurven keine Einbuchtung mehr.

**Suche nach anallagmatischen Fällen für  $k < e$**  In diesem Fall ist der Faktor vor dem ersten Summanden negativ. Multiplikation mit  $-1$  ergibt  $\frac{e^4 - k^4}{k_i^4} (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = -k_i^4$ . Nun erreichen wir Übereinstimmung mit der Ausgangsgleichung durch  $k_i^4 = e^4 - k^4$ , denn vorn entsteht dann die gewünschte 1 und die rechte Seite wird  $k^4 - e^2$ , wie es sein muss. Darum haben wir mit  $k = \sqrt[4]{e^4 - k_i^4} = \sqrt[4]{3^4 - 2^4} = 2.84$  die **einzig** „echt“-anallagmatische Cassini'sche Kurve für dieses Wertepaar  $(e, k_i)$ .

**Überlegung zu anderen Werten von  $e$  und  $k_i$**  Mit  $e$  und  $k$  wird die Form der Cassini'schen Kurve festgelegt. Zu jeder Form mit  $e \neq k$  gibt es dann einen Inversionskreisradius aus obigen Formeln, der sie zur anallagmatischen Kurve macht, für  $k < e$  „echt“, für  $k > e$  in kongruenter, aufrechter Form.

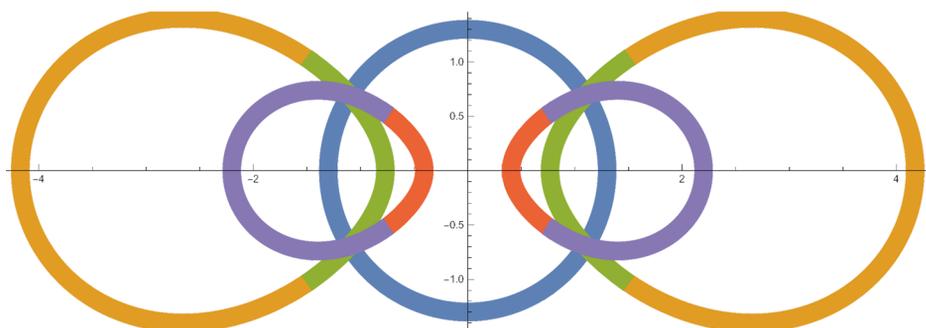
**Sonderfall  $e = k$**  Nun ist die Cassini'sche Kurve speziell die Bernoulli'sche Lemniskate. Sie hat als Inversionsbild die rechtwinklige Hyperbel  $x^2 - y^2 = a^2$  mit  $a^2 = \frac{k_i^2}{2e^2}$ . Die Lemniskate ist eine Cassini'sche Kurve, die für keinen Inversionskreisradius anallagmatisch ist.

**Berührung des Inversionskreises** In Abb. 9.31 a) erfüllt der innere rechte Scheitel die Gleichung  $x^2 = e^2 - k^2$ . Für Berührung muss gelten  $e^2 - k^2 = k_i^2$ , also  $k = \sqrt{e^2 - k_i^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} = 2.24$

**Einteilige Cassini'sche Kurven ohne Delle** In Abb. 9.32 c) erfüllt der obere Scheitel auf der y-Achse die Gleichung  $y = \sqrt{k^2 - e^2}$ . Die Gerade durch diesen Scheitel schneidet die Kurve in  $x = 0$  doppelt und in  $x = \pm\sqrt{2}\sqrt{2e^2 - k^2}$ . Die Diskriminante dieser äußeren Schnittstellen verschwindet für  $k = \sqrt{2}e = 4.24$ . Für größere  $k$  gibt es keine Delle mehr.

Dieser Zusammenhang ist durch das Quadrat mit seinen Ecken in  $(\pm e, 0)$ , den Brennpunkten, und  $(0, \pm e)$  visualisiert. Wenn man dieses Quadrat mit dem Button „Kreis Spiegelung“ invertiert, wird das Innere nach außen gekehrt, aus der Quadratanten werden Kreisstücke.

**Arbeiten mit der Polardarstellung** Diese erweist sich wegen der impliziten Form der Polargleichung aus aufwändig. Die Gleichung  $r^4 - 2e^2r^2\cos(2\theta) = k^4 - e^4$  hat nämlich die Lösungen  $r_1(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{e^4\cos(4\theta) - e^4 + 2k^4}}{\sqrt{2}} + e^2\cos(2\theta)}$  und  $r_2(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{2e^2\cos(2\theta) - \sqrt{2}\sqrt{e^4\cos(4\theta) - e^4 + 2k^4}}}{\sqrt{2}}}$ . Die mit  $k_i^2$  multiplizierten Kehrwerte sind dann die Polargleichungen der invertierten Kurven. Von Hand ist das unerquicklich, aber Mathematica macht es für Abb. 9.33 klaglos.



**Abb. 9.33 Aufgabe 9.16 Inversion mit der Polarform der Cassini'schen Kurven für  $e = 3$ ,  $k = 2.9$  und  $k_i = 1.3$ .** Urbilder sind die violetten und roten Bögen aus dem 1. und 2. Term. Deren inverse Bilder sind die gelben und grünen Bögen. Punkte innerhalb des blauen Inversionskreises haben ihre Bilder außen und umgekehrt. Bild und Urbild sind stets auf demselben Radiusstrahl auf derselben Seite des Ursprungs.

Die Untersuchung, welche Kurventeile welche Bilder haben, lässt sich in GeoGebra auch interaktiv untersuchen durch einen zugfesten Punkt  $Q$  auf einer Cassini'schen Kurve und dessen mit dem Button „Kreis Spiegelung“ erzeugten Bild  $P$ . Hat man Bildkurve und Urbildkurve, sieht man aber auch „mit bloßem Auge“ auf dem (gedachten) Radiusstrahl, welches das Bild eines Punktes sein kann.

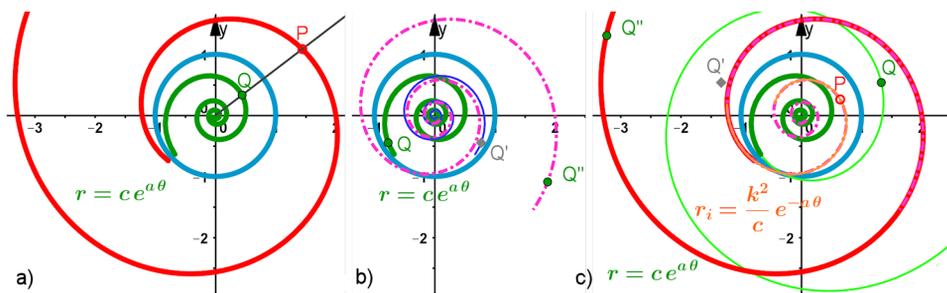
# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, Website zum Buch

## 9.5.6 Inversion von Kurven als Aufgaben

### Aufgabe 9.17 Königin der Spiralen und ihre Inversion

Von der von Bernoulli wegen ihrer vielfältigen Reproduzierbarkeit so geschätzten logarithmischen Spirale  $r(\theta) = ce^{a\theta}$  wird gesagt, sie sei *anallagmatisch*, reproduziere sich auch bei der Inversion selbst. Untersuchen Sie dies, siehe Abb. 9.21 d), und beachten Sie die Erweiterung des Begriffs, durch die nachfolgende Kongruenzabbildungen zugelassen werden. Lesen Sie dazu auch die Abschnitte 8.1.2 und 8.1.5 zur *spira mirabilis*.



**Abb. 9.34 Aufgabe 9.17 Königin der Spiralen (die *spira mirabilis*, logarithmische Spirale, Exponentialspirale, Bernoulli'sche Spirale ) und ihre Inversion**

- a) Die Ur-Spirale innerhalb des Inversionskreises wird nach Außen abgebildet,
- b) die Ur-Spirale wird an der y-Achse gespiegelt und dann mit dem Faktor  $f = \frac{k^2}{c^2} e^{-a\pi}$  gestreckt, letzteres ist nach Gleichung 8.5 und 8.6 Seite 227 im Buch eine Drehung um  $\delta = \pi - \frac{1}{a} \ln(\frac{k^2}{c^2})$ .
- c) zeigt, dass die mit der Kongruenzabbildung b) erzeugte violette Spirale genau zu der invertierten Spirale passt. Also ist die **Königin der Spiralen anallagmatisch** i. w. S.

**Lösung:** Der wahrlich herausragenden Spirale mit den vielen Namen sind im Buch sechs Seiten gewidmet. Als „i-Tüpfelchen“ betrachten wir nun ihre Inversion. Wie bei allen Polarkurven ist ihr Inversionsbild schnell hingeschrieben: zu  $r(\theta) = ce^{a\theta}$  gehört  $r_i(\theta) = \frac{k^2}{c} e^{-a\theta}$ . Hier steht wieder eine Exponentialfunktion, darum gehört das Inversionsbild zu derselben Familie der Königin-Spiralen. In Abb. 9.34 a) (hier) ist in Grün ein Stück aus dem Urbild zu sehen, das ganz im Inversionskreis liegt. Es ist  $c = 0.5$  und  $a = 1,6$ . Das Bild davon liegt dann ganz außerhalb, Bild und Urbild würden sich bei  $\theta = -\frac{\ln c}{a} \approx 4.4$  schneiden, das Ende ist bei  $\theta_{ende} = 3.9$  gewählt. Die rote Bildkurve ist mit dem Button „Kreisspiegelung“ erzeugt. In Abb. c) ist das Urbild in Hellgrün und das Bild in Orange gemäß der obigen Formel für  $r_i$  verlängert.

**Die Königin ist anallagmatisch** in weiterem Sinne, d. h. nach Abschnitt 9.5.4 auf Seite 291 im Buch, dass das Inversionsbild durch eine **Kongruenzabbildung** mit dem Urbild zur Deckung gebracht werden kann. Das soll im Folgenden gezeigt werden.

Dazu wird zunächst das Urbild mit dem Button „Geradenspiegelung“ an der  $y$ -Achse gespiegelt in das blaue Spiralenstück in Bild b). Einen zunächst freien Streckfaktor  $f$  kam man interaktiv wachsen lassen, bis das gestreckte Bild auf dem Inversionsbild liegt. Dieses ist in Bild b) durch den (zugfesten) Punkt  $Q$ , seinen grauen Spiegelpunkt  $Q'$  und den zentrisch gestreckten Punkt  $Q''$  verdeutlicht.

Aber auch die Berechnung dieser Abbildung ist möglich:

Die **Spiegelung an der  $y$ -Achse** erreichen wir durch Vorzeichenwechsel bei  $x$ , dabei bleibt  $y$  bestehen. Sollen das mit  $f$  gestreckte Spiegelbild und das Inversionsbild übereinstimmen, so muss gelten  $x = -f \cdot r(t) \cos(t) = r_i(u) \cos(u)$  und  $y = f \cdot r(t) \sin(t) = r_i(u) \sin(u)$ . Division dieser beiden Gleichungen ergibt  $\frac{y}{x} = \tan(u) = -\tan(t) = \tan(-t + n\pi)$ , woraus  $u = -t + n\pi$  folgt. Für  $n = 0$  ergibt sich nichts Sinnvolles, aber  $n = 1$  führt zu dem durch Interaktion etwa bestimmten Wert:

Die Gleichung  $-f \cdot c e^{at} \cos(t) = \frac{k^2}{c} e^{at-a\pi} \cos(-t + \pi)$  und  $f \cdot c e^{at} \sin(t) = \frac{k^2}{c} e^{at-a\pi} \sin(-t + \pi)$  führt wegen  $\cos(-t + \pi) = -\cos(t)$  und  $\sin(-t + \pi) = \sin(t)$  schließlich zu dem **exakten Streckfaktor**  $f = \frac{k^2}{c^2} e^{-a\pi} \approx 2.43$ . Beide Gleichungen liefern dasselbe  $f$ .

Wegen der Streckung ist diese Gesamtabbildung eigentlich „nur“ eine Ähnlichkeitsabbildung und, da  $f \neq 1$  ist, keine Kongruenzabbildung. Das aber ist gerade das Fazinierende an der Königin der Spiralen, dass die Streckung nach dem blauen Kasten auf Seite 229 im Buch und Gleichungen 8.5 und 8.5 durch eine **Drehung** ersetzt werden kann. Der Drehwinkel steht in der Legende zu Abb. 9.34 (hier). Damit habe wir nun doch als Hintereinanderausführung von Geradenspiegelung und Drehung eine gesicherte **Kongruenzabbildung**. Also ist die **Königin der Spiralen anallagmatisch i. w. S.**

# In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, Website zum Buch

## 9.6 Exoten-Kurven

### 9.6.1 Kurven mit natürlicher Gleichung

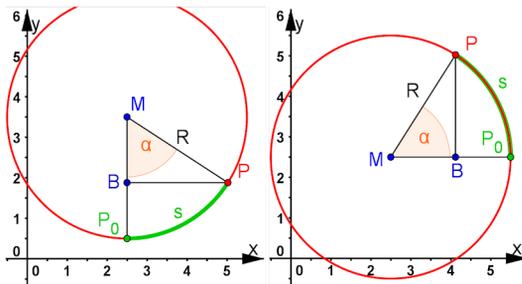
#### 9.6.1.1 S. 296 Verbale Aufgaben zu Kurven mit konstanter Krümmung

##### Parametrisierung nach $s$ aus der Krümmung $\kappa(s)$

Es sind die drei Integrale relevant:

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \int_{s_0}^s \kappa(s) ds \tag{9.11}$$

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\alpha(s)) ds \quad y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\alpha(s)) ds \tag{9.12}$$



**Abb. 9.35** Verbal-Aufgabe zum Kreis

**S. 296** Der Startpunkt sei  $P(x_0, y_0)$ .

Die Krümmung der gesuchten Kurve sei  $\kappa = \frac{1}{R}$ .

Damit ist klar, dass ein Kreis herauskommen muss.

Die Bilder a) und b) zeigen verschiedene Auffassungen, wie der zu  $s$  gehörige Winkel aufgefasst werden soll.

**Rechnungen zu a)** Wir setzen  $\alpha_0 = 0$  und  $s_0 = 0$ . Mit  $\alpha(s) = \int_0^s \frac{1}{R} ds = \frac{1}{R}s$  haben wir die bei Kreis übliche Formel  $s = \alpha R$  neu erzeugt. Mit  $x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(\alpha(s)) ds = x_0 + R \sin\left(\frac{s}{R}\right)$  und  $y(s) = y_0 + \left(R - \int_0^s \sin(\alpha(s)) ds\right) = y_0 + R - \left(-R \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$  und der 1 als Quadratesumme von Sinus und Kosinus erhalten wir die behauptete Formel  $(x - x_0)^2 + (y - y_0 - R)^2 = R^2$ .

**Rechnungen zu b)** Ersichtlich ist nun  $x = x_0 - R + R \cos(\alpha)$  und  $y = y_0 + R \sin(\alpha)$ . Mit  $\alpha = \frac{s}{R}$  hat das auf entsprechende Weise die Kreisgleichung  $(x - x_0 + R)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  zur Folge.

### 9.6.2 Klothoide

### 9.6.3 Traktrix oder Schleppkurve

## In: Kurven erkunden und verstehen

Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

### 9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus

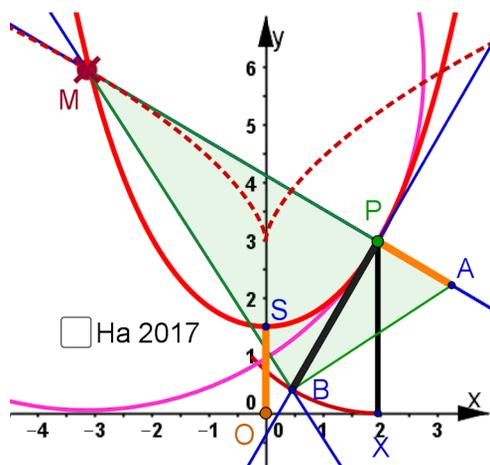
#### Aufgabe 9.18 Kettenlinie

1. Berechnen Sie für die Kettenlinie Ableitung, Krümmung  $\kappa(x)$  und Krümmungsradius  $R(x)$ . Verwenden Sie alle drei Aussagen von Gleichung 9.31
2. In der Form  $a \cdot R(x) = f(x)^2$ , die Sie aus dem vorigen Top erhalten, sehen Sie, dass Sie mit dem Höhensatz eine Konstruktion des Krümmungskreis-Mittelpunktes erfinden können. Tangente und Normale seien dabei für einen zugfesten Punkt  $P$  von GeoGebra beschafft. Sichern Sie Ihr Ergebnis durch die Evolute als Hüllkurve ab. Siehe dazu Abschnitt 9.3.
3. Bei Kettenlinien und Parabeln, die sich schneiden und denselben Scheitel haben, ist immer die Parabel im Scheitel „schlanker“. Sehen Sie sich das an weiteren Beispielen an und beweisen Sie diese Behauptung. Welche Folgen hat ein gleicher Scheitelkrümmungsradius?
4. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge der Kettenlinie vom Scheitel bis zur Stelle  $x$  durch  $s(x) = a \sinh(\frac{x}{a})$  gegeben ist. In Abb. 9.24 a) handelt es sich um die Kettenlinie mit  $a = 0.4$  und  $c = 1 - a$ . Die Parabel ist  $y = 2.87x^2 + 1$ , der Eckpunkt hat die Ordinate 6. Vergleichen Sie die abgebildeten Längen.
5. Zeichnen Sie mit GeoGebra zu einer Kettenlinie die Evolvente, deren Spitze der Scheitel ist. Sie erhalten eine Traktrix. Realisieren Sie auch umgekehrt eine Traktrix und bilden Sie als Hüllkurve ihrer Normalen eine Kettenlinie. Also gilt: **Die Evolute einer Traktrix ist eine Kettenlinie**. Zur Traktrix lesen Sie Abschnitt 9.6.3, zu Evoluten und Evolventen die Abschnitte 9.2 und 9.3.3.
6. Blättern Sie jetzt einmal zurück zu Abschnitt 8.3.3, in dem der Brennpunkt einer abrollenden Parabel eine Kettenlinie erzeugt. Auch dieses ist ein Baustein für die Beobachtung: **In der Mathematik ist alles mit allem verwoben**.

**Lösung zu 1.:** Für  $f(x) = a \cosh(\frac{x}{a})$  gilt  $f'(x) = \sinh(\frac{x}{a})$  und  $f''(x) = \frac{1}{a} \cosh(\frac{x}{a})$  nach Gleichung 9.31. Für die Krümmung ergibt sich dann  $\kappa(x) = \frac{\cosh(\frac{x}{a})}{a \sqrt{1 + \sinh(\frac{x}{a})^2}} = \frac{\cosh(\frac{x}{a})}{a \sqrt{\cosh(\frac{x}{a})^2}} = \frac{1}{a \cosh(\frac{x}{a})} = \frac{a}{f(x)^2}$ . Mit  $R(x) = \frac{1}{\kappa(x)}$  erhalten wir  $a \cdot R(x) = f(x)^2$ .

**Lösung zu 2.:** Der Höhensatz von Euklid für die Höhe  $h$  eines rechtwinkligen Dreiecks lautet  $p \cdot q = h^2$  wobei  $p$  und  $q$  die Höhenabschnitte auf der Hypotenuse sind. Ein solches Dreieck mit der Höhe  $h = f(x)$  und dem einen Hypotenusenabschnitt  $a$  ist in Abb. 9.36 in geschickter Lage konstruiert. Es liefert also als zweiten Hypotenusenabschnitt den Krümmungsradius  $R(x)$ .

Bauen Sie das nach – oder nehmen Sie die Datei von der Website – und setzen Sie den Spurmodus für die Normale, dann sehen Sie die Evolute auch als Hüllkurve der Normale, wie es sein muss.



**Abb. 9.36 Aufgabe 9.18 Kettenlinie und ihre Krümmung**

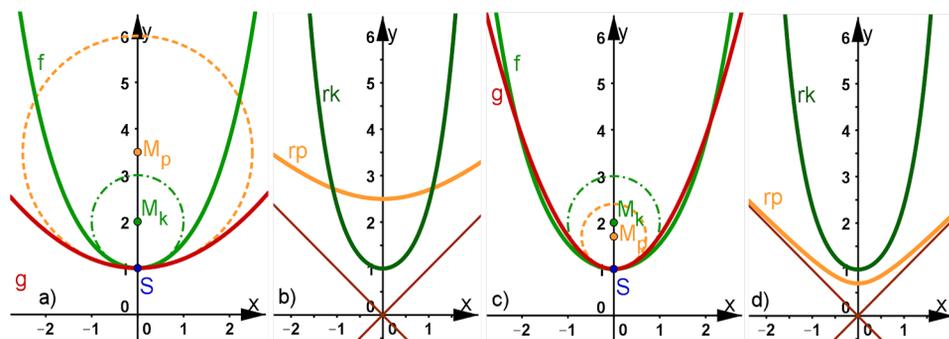
**Zu 2.** Konstruktion: Erzeuge zu einem Punkt  $P$  auf der Kettenlinie mit GeoGebra die Tangente, die Normale und die (schwarze) Ordinatenstrecke. Trage diese auf der Tangente ab ( $B$ ). Übertrage die Ordinate des Scheitels (orange) auf die Normale ( $A$ ). Nun entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe  $\overline{PB}$  und der einen Kathete  $\overline{AB}$  durch eine Senkrechte in  $B$  auf  $AB$ . Diese schneidet  $AP$  in  $M$  und  $M$  ist der gesuchte **Krümmungskreismittelpunkt**.

Die Ortslinie von  $M$  bei Bewegung von  $P$  ist die **Evolute** (gestrichelt) der Kettenlinie.

**Lösung zu 3.:** Die Kettenlinie habe die Funktionsgleichung  $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ . Sie hat den Scheitel  $S = (0, a)$  und dort nach Punkt 1. den Krümmungsradius  $R_k(0) = a$ . Damit ergibt sich der Krümmungskreismittelpunkt  $M_k$  übrigens als Spiegelpunkt des Ursprungs am Scheitelpunkt  $S$ .

Eine Parabel mit demselben Scheitel  $S$  (und derselben Symmetrieachse) hat die Gleichung  $g(x) = \frac{1}{2p}x^2 + a$ . Man verifiziert leicht als Funktion für den Krümmungsradius  $rp(x) = \sqrt{p^2 + x^2}$ ,  $rp(0) = p$  und  $M_p = (0, a + p)$ .

In Abb 9.37 a) und c) sind die Funktionen  $f$  und  $g$  gemeinsam dargestellt. Die Funktionen ihrer Krümmungsradien sind in b) und d) zu sehen. Dabei ist  $r_k(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2$ .



**Abb. 9.37 Aufgabe 9.18 Parabel und Kettenlinie** a) und b) mit  $a = 1$  und  $p = 2.5$ . Die Parabel hat mit der Kettenlinie ausschließlich den Punkt  $S$  gemeinsam. Die Funktion  $rp$  ist eine Hyperbel mit den eingezeichneten Asymptoten  $y = \pm x$  (für alle  $p$ ). Der Krümmungsradius wächst letztlich nur linear, die Parabel kann sich nicht mehr zur Kettenlinie hin krümmen. c) und d) mit  $a = 1$  und  $p = 0.7$ . Die Parabel ist bei  $S$  schlanker als die Kettenlinie, aber die Funktion  $r_k$  ist, wie auch die Kettenlinie selbst, letztlich eine Exponentialfunktion, die bewirkt, dass die Kettenlinie die Parabel noch schneiden muss.

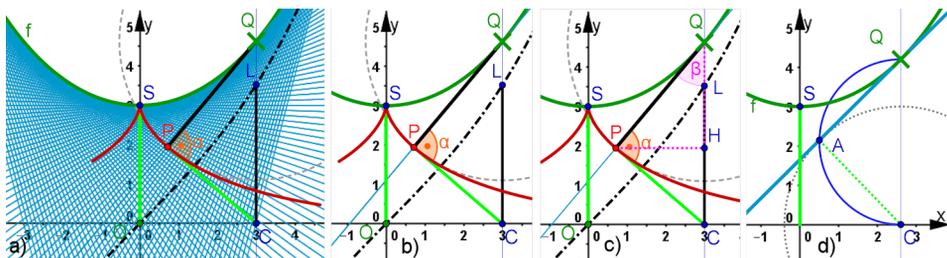
Die Krümmungsradien im Scheitel sind gleich für  $a = p$ . Für  $0 < p < a$  gibt es zwei weitere gemeinsame Punkte von Kettenlinie und Parabel, für  $0 < a \leq p$  ist der Scheitel der einzige gemeinsame Punkt.

**Lösung zu 4.:** Für die Bogenlänge der Kettenlinie verwenden wir die Ableitung aus Punkt 1. und erhalten  $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{u}{a}\right)^2} du = \int_0^x \cosh\left(\frac{u}{a}\right) du = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ , wie zu zeigen war.

Für Abb. 9.24a) konnte ich den tiefsten Punkt des Fotos der hängenden Kette in  $S = (0, 1)$  platzieren, aber die Kettenlinie  $\hat{f}(x) = 1 \cosh\left(\frac{x}{1}\right)$  passte nicht. Wie auf Seite 303 im Buch erklärt – und davor theoretisch begründet – ist ein weitere Parameter zur Anpassung nötig. Als Aufhängepunkt für die Kette ergab sich aus dem Foto  $H = (1.32, 6)$ . Mit Gleichung 9.35 folgt zunächst  $a + c = 1$ , also als Funktion für die Kettenlinie  $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 1 - a$ . Die Gleichung  $f(1.32) = 6$  ist eine transzendente Gleichung, die von GeoGebra – wenn man  $x$  anstelle von  $a$  schreibt – mit dem Button  $x \approx$  numerisch gelöst wird zu  $a = 0.4$ . Für eine Parabel mit  $g(x) = b \cdot x^2 + 1$  erhalten wir ebenso aus der Gleichung  $b \cdot 1.32^2 + 1 = 6$  nun  $b = 2.87$ .

Die Länge der Kette als Kettenlinie ist dann  $s_k = 2 \cdot 0.4 \sinh\left(\frac{1.32}{0.4}\right) = 10.83$ . Dagegen ist die Länge der Parabel  $s_p = 2 \int_0^{1.32} \sqrt{1 + (2 \cdot 2.87x)^2} dx = 10.56$ , erwartungsgemäß etwas kürzer.

**Lösung zu 5.:** Für die Kettenlinie wird wie in Abb. 9.10 auf Seite 274 auf der Tangente der von  $O$  gelaufene Weg abgetragen, wie es Abb. 9.38 b) (hier) zeigt.



**Abb. 9.38 Aufgabe 9.18-5 Kettenlinie und Traktrix** Die Kettenlinie  $f$  ist als Funktion in Grün eingetragen,  $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ . Die Traktrix ist in Rot zu sehen, sie existiert als Ortslinie. Die hellgrünen Strecken  $\overline{SO}$  und  $\overline{PC}$ , auch  $\overline{AC}$  in d), haben die Länge  $a$ . Die Weglänge von  $S$  nach  $Q$  auf der Kettenlinie ist nach Punkt 4. (oben):  $s(x) = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ , die Funktion ist schwarz gestrichelt zu sehen. Die Ordinate von  $L$  (schwarze Strecke) ist auf der Tangente an die Kettenlinie in  $Q$  abgetragen und erzeugt  $P$ . Die Ortslinie von  $P$  ist damit eine **Evolvente der Kettenlinie**. Beweise für das Folgende liefert der Text.

- a) Die Spur der Normalen der Evolvente hat als Hüllkurve die Kettenlinie.
- b) Die beschriebene Konstruktion ist deutlich zu sehen.
- c) Zu Beweis gehört das Steigungsdreieck (violett) der Tangente.
- d) **Zusatz:** Mit dem Thalesatz lässt sich die **Tangente an die Kettenlinie konstruieren**. Die Spur auf  $\overline{AC}$  ließe dann auch als Hüllkurve die Traktrix entstehen.

**Beweis, dass  $P$  auf einer Traktrix liegt.** Mit  $Q = (u, v)$  haben wir  $v = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right)$ . Die Gleichung der Tangente in  $Q$  ist wegen  $f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$  nun  $y - v = \sinh\left(\frac{u}{a}\right) \cdot (x - u)$ . Eine dritte Gleichung kann der grau gestrichelte Kreis mit dem Radius  $s(u)$  in Abb. 9.38 b) liefern. Doch leider sind diese alles transzendenten Gleichungen in  $u$ , wir können nicht auf die sonst übliche Art  $u$  und  $v$  eliminieren. Wir können aber die Beziehung  $1 + \sinh\left(\frac{u}{a}\right)^2 = \cosh\left(\frac{u}{a}\right)^2$  aus Gleichung 9.31 nutzen, wenn wir mit  $a^2$  multiplizieren, haben wir nämlich  $a^2 + s(u)^2 = v^2$ . Dabei ist  $s(u) = a \sinh\left(\frac{u}{a}\right)$  nach Punkt 4. dieser Aufgabe. Es gibt also ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $s$  und der Hypotenuse  $v$ . Wir müssen nur noch nachweisen, dass diese Hypotenuse auch wirklich die Richtung der Ordinate  $v$  hat, wie es in Bild b) erscheint.

Dazu betrachten wir den Winkel  $\hat{\beta} = \angle PQC$  im genannten rechtwinkligen Dreieck:  $\tan(\hat{\beta}) = \frac{a}{s} = \frac{a}{a \sinh\left(\frac{u}{a}\right)} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{u}{a}\right)}$ .

In Bild c) haben wir mit violetten Katheten ein Steigungsdreieck der Tangente, in dem nach der zweiten obigen Gleichung gilt:  $\tan(\beta) = \frac{u-x}{v-y} = \frac{x-u}{y-v} = \frac{1}{\sinh\left(\frac{u}{a}\right)}$ . Zusammen gilt also  $\hat{\beta} = \beta$ , die beiden Dreiecke passen so ineinander, wie es Abb. 9.38 c) (hier) zeigt.

Bezogen auf Abb. 9.23 im Buch S. 299 läuft  $C$  stets auf der x-Achse als „Tischkante“,  $P$  spielt die Rolle der „Uhr“ und die „Uhrkette“ hat die feste Länge  $a$ . Also ist die rote Ortskurve von  $P$  tatsächlich die Traktrix.

**Zusatz: Konstruktion der Tangenten für die Kettenlinie** Das oben vorgestellte rechtwinklige Dreieck  $QPC$  führt uns auch zu einer Konstruktion der Tangente in  $Q$ , die in Abb. 9.38 d) (hier) gezeigt ist: Gegeben ist die Kettenlinie mit  $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$  und ihr Graph in GeoGebra, darauf ein Punkt  $Q$ . Es sei  $C$  der Fußpunkt des Lotes von  $Q$  auf die x-Achse. Ein Kreis um  $C$  mit dem Radius  $a$  schneidet den Thaleshalbkreis in  $P$ . Dann ist  $QP$  die **gesuchte Tangente**.

Setzt man die Spur auf  $CP$ , so entsteht beim Ziehen von  $Q$  die Traktrix als Hüllkurve. **Kleine Anmerkung:** Natürlich „braucht“ man eine solche Konstruktion nicht, GeoGebra oder eigene Rechnung liefert die Tangente ja gleich direkt. Aber ich finde den Zusammenhang einfach **schön**. Weder die Kettenlinie selbst noch die Traktrix kann man elementar konstruieren, denn es sind beide transzendenten Kurven. So ist dieser „Thales-Zusammenhang“ doch etwas Besonderes.

**Anmerkung zu GeoGebra und der „Punktsprung“-Vermeidung** Zieht man  $Q$  auf der Kettenlinie auf die andere Seite von  $S$ , so wird von dem Ortslinienwerkzeug i. d. R. anstelle des gewünschten  $P$  auf der Traktrix der andere Schnittpunkt gewählt, den der grau gestrichelte Kreis mit der Tangente gemeinsam hat. Um das zu vermeiden muss man im erweiterten Eigenschaftsmenu von GeoGebra den Haken bei „Kontinuität“ auf „An“ setzen. Dann wird auch der linke Teil der Traktrix als Ortslinie richtig angezeigt.

Das DGS Cinderella was das erste, das durch die Verwendung „homogener Koordinaten“ dieses Problem bewältigt hat. Wie genau es GeoGebra dann auch geschafft hat, entzieht sich meiner Kenntnis, aber es ist wichtig, dass man um diese Möglichkeit weiß.

# In: Kurven erkunden und verstehen

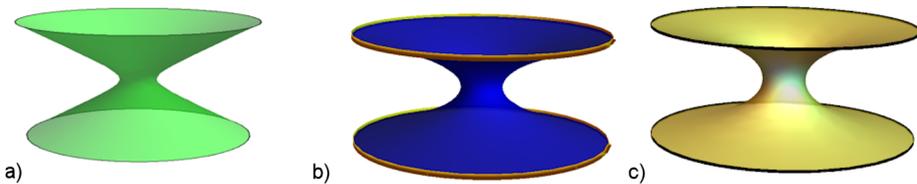
Dörte Haftendorn, Springer 2017, [Website zum Buch](#)

## 9.6.4 Kettenlinie, Kosinus- und Sinus hyperbolicus, räumlich

### Aufgabe 9.19 Katenoid als Minimalfläche

Minimalflächen bilden sich z. B. als Seifenhäute zwischen Drähten. Im Mathematikum in Gießen kann man dazu Experimente machen. Drahtwürfel und andere Körper kann man in Seifenlauge tauchen und nach dem Herausziehen über die entstandenen Flächen staunen. Mathematisch sind die Minimalflächen im Allgemeinen nicht leicht zu bestimmen, zudem gehört das nötige Rüstzeug nicht in dieses Buch. Wenn sich die Seifenhaut zwischen zwei räumlich parallelen Kreisen spannt, entsteht ein Katenoid, also eine Rotationsfläche aus der Kettenlinie. In Abb. 9.39 c) (hier) ist es zu sehen. Die Aufgabe geht von der Gleichung der Kettenlinie  $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$  im Intervall  $[-2, 2]$  aus.

Bestimmen Sie für eine Hyperbel  $-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$  mit  $a$  von der Kettenlinie den Parameter  $b$  so, dass sie am Rand mit der Kettenlinie übereinstimmt. Bestimmen Sie entsprechend auch eine Parabel mit dem Scheitel  $(0, a)$  und ein Polynom  $y = cx^4 + a$  und prüfen Sie Ihre Ergebnisse in einem 2D-Koordinatensystem.



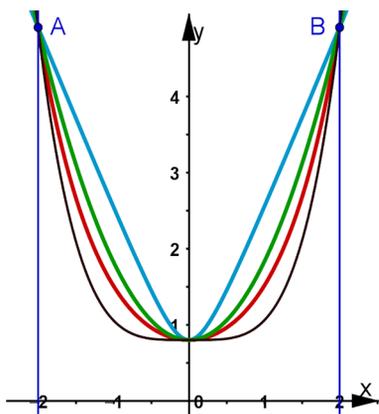
**Abb. 9.39** Rotationskörper, die x-Achse weist nach oben. **a) Hyperboloid, b) Paraboloid, c) Katenoid, die Minimalfläche**, sie wird von einer Seifenhaut zwischen den zwei Kreisen gebildet.

Wenn Sie unbändige Lust darauf haben, Ihre Analysis- und CAS-Fähigkeiten zu erproben, können Sie sich mit den Formeln 11.11 und 11.14 dem Volumen und der Mantelfläche dieser Körper widmen. Letzteres ist aber wirklich knifflig.

### Hinweis

Auf der Website zum Buch ist alles durchgeführt. Zu den Volumina der Rotationskörper von Kegelschnitten lesen Sie evt. Abschnitt 5.3.6. Da bei diesen immer  $y^2$  vorkommt, sind die betrachteten Integrale leicht zu lösen. ◀

**Lösung Aufgabe 9.19** Die Anpassungen der geforderten Funktionen bereitet keine Schwierigkeiten und geht aus der Legende zu Abb. 9.40 (hier) hervor. Wie schon im Buch erwähnt und in Aufgabe 9.18 noch extra untersucht wurde, ist die Parabel in so einer Anordnung im Scheitel schlanker als die Kettenlinie, die Hyperbel wirkt beinahe trichterförmig aber die Potenzfunktion ist deutlich breiter. Die 3D-Bilder in der Aufgabenstellung muss man um  $90^\circ$  nach rechts drehen, dann geht es also nun um die Rotationkörper der betrachteten Funktionen um die x-Achse. Deren Volumina werden



**Abb. 9.40 Aufgabe 9.19 Katenoid als Minimalfläche**

Gezeigt sind vier Kurven mit demselben Scheitelpunkt und den gemeinsamen „Aufhängepunkten“  $A$  und  $B$  an den Stellen  $\pm 2$ . Die Ordinate muss dann  $y_A = a \cosh\left(\frac{2}{a}\right) \approx 4.9$  sein, dabei ist für die Zeichnung  $a = 0.8$  gewählt. Die Kurven sind:

**blaue Hyperbel**  $y^2 = a^2 \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)$  mit  $b^2 = \frac{4a^2}{y_A^2 - a^2} \approx 0.11$ , also  $b \approx 0.33$ .

**grüne Parabel**  $y = dx^2 + a$ , mit  $d = \frac{y_A - a}{4} \approx 1.03$

**rote Kettenlinie**  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ,

**schwarzes Polynom 4. Grades.**  $y = cx^4 + a$ , mit  $c = \frac{y_A - a}{16} \approx 0.26$

$V_{poly} < V_{kette} < V_{parabel} < V_{hyperbel}$  erfüllen. Aber über deren Mantelflächen lässt sich durch „Hinsehen“ nichts aussagen. Wir berechnen diese Größen in den folgenden Absätzen, die zugehörige Mathematica-Datei und ihre pdf-Version sind auf der Website verlinkt..

**Berechnung der Rotationsvolumina** Wegen der Symmetrie zur  $y$ -Achse reicht es bei allen Funktionen, wenn wir die Grenzen von 0 bis 2 betrachten und den berechneten Wert verdoppeln. Mit der Formel (11.11) auf Seite 323 des Buches ergibt sich:  $V = 2\pi \int_0^2 f(x)^2 dx$ .

**Hyperbel:**  $V_{hyp} = 2\pi \int_0^2 a^2 \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right) dx = 2\pi a^2 \left[2 + \frac{8}{b^2}\right]_0^2$ . Bei  $a = 0.8$  und  $b$  aus der Bildlegende ergibt  $V_{hyp} = 106.147$ .

**Parabel:**  $V_{para} = 2\pi \int_0^2 (dx^2 + a)^2 dx$ . Bei  $a = 0.8$  und  $d$  aus der Bildlegende ergibt  $V_{para} = 77.9$ .

**Kettenlinie:**  $V_{kette} = 2\pi \int_0^2 a^2 \cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2 dx = 2\pi a^2 \left[\frac{1}{4}a \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) + \frac{x}{2}\right]_0^2$ . Bei  $a = 0.8$  ergibt sich  $V_{kette} = 63.7$ .

**Polynom:**  $V_{poly} = 2\pi \int_0^2 (cx^4 + a)^2 dx$ . Bei  $a = 0.8$  und  $c$  aus der Bildlegende ergibt  $V_{poly} = 48.1$ .

**Berechnung der Mantelflächen** Wegen der Symmetrie zur  $y$ -Achse reicht es bei allen Funktionen, wenn wir die Grenzen von 0 bis 2 betrachten und den berechneten Wert verdoppeln. Die Formel habe ich aus dem dicken Buch: Arens et al. „Mathematik“ (Springer):  $M = 2 \cdot 2\pi \int_0^2 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

**Kettenlinie:**  $V_{kette} = 4\pi \int_0^2 a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$  mit der Beziehung 9.31 von Seite 301 im Buch wird der Integrand viel einfacher, nämlich  $a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)^2$  und damit der partiellen Integration zugänglich. Schließlich wird  $M_{kette} = 4\pi a \left[\frac{1}{4}a \sinh\left(\frac{2x}{a}\right) + \frac{x}{2}\right]_0^2 \approx 159.248$

Für die Integrale zu den anderen Funktionen muss sich ein Mensch heute seines Rechenknechtes CAS bedienen. Mir hat Mathematica folgendes geliefert (Datei ind pdf-Datei auf der Website): **Hyperbel:**  $M_{hyp} = 161.78$ , **Parabel:**  $M_{para} = 159.53$ , **Polynom:**  $M_{oly} = 159.72$ .

Tatsächlich hat das **Katenoid**, also die Mantelfläche, deren Berandung die Kettenlinie ist, die **kleinste Fläche**. Die Unterschiede sind aber als relative Abweichungen ausgedrückt 1,6%, 0,18%, 0,3% und damit recht klein. Wohlgemerkt: niemand muss die Randfunktionen realisieren, denn für die Form sorgt „die Physik“ mit ihren Minimalprinzipien.

Wie sagte doch Galilei: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“



# 10 Didaktische Übersicht

---

## Übersicht

10.1 Grundlegendes zur Didaktik der Kurven.....	157
10.2 Was passt zu welchem Vorwissen? .....	157
10.3 Lehramt Mathematik, Mathematik BA u.s.w .....	157

---

## 10.1 Grundlegendes zur Didaktik der Kurven

10.1.1 Das Thema Kurven heute

10.1.2 Blick zurück und nach vorn

10.1.3 Didaktische Gründe für den Softwareeinsatz

10.1.4 Wie kann man das freie Erkunden anregen?

10.1.5 Was heißt eigentlich „Verstehen“?

## 10.2 Was passt zu welchem Vorwissen?

10.2.1 Der Start, geeignet für die Jüngsten

10.2.2 Der zweite Schritt, geeignet für die Jugendlichen

10.2.3 Letzter Schritt in die Freiheit

10.2.4 Blackbox-Whitebox-Prinzip

10.2.5 Begabtenförderung

## 10.3 Lehramt Mathematik, Mathematik BA u.s.w



# 11 Anhang: Elemente der Analysis für Kurven

---

## Übersicht

11.1 Kurven im Blick der Analysis .....	159
11.2 Steigung und Ableitung .....	159
11.3 Flächen und Volumina der Rotationskörper .....	159
11.4 Bogenlänge .....	160
11.5 Krümmungen .....	160

---

## 11.1 Kurven im Blick der Analysis

## 11.2 Steigung und Ableitung

### 11.2.1 Steigung und Ableitung, explizit kartesisch

### 11.2.2 Implizite kartesische Ableitung

### 11.2.3 Steigung und Ableitung in Parameterdarstellung

### 11.2.4 Steigung bei Polarkurven

### 11.2.5 Gleichungen von Tangente und Normale

## 11.3 Flächen und Volumina der Rotationskörper

### 11.3.1 Fläche bei Funktionen und expliziten Gleichungen

### 11.3.2 Kurven in Parameterdarstellung

### 11.3.3 Flächen bei Polarkurven

### 11.3.4 Volumen von Rotationskörpern

## 11.4 Bogenlänge

### 11.4.1 Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven

### 11.4.2 Bogenlänge bei Polarkurven

## 11.5 Krümmungen

### 11.5.1 Definition der Krümmung und interaktive Zugänge

### 11.5.2 Herleitung der kartesischen Krümmungsformel aus der Definition

### 11.5.3 Krümmungsformel für Polarkurven

### 11.5.4 Orientierung von Kurven

### 11.5.5 Wirkung des Vorzeichens der Krümmung