In: Kurven erkunden und verstehen
Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

9.6 Exoten-Kurven

9.6.1 Kurven mit natürlicher Gleichung

9.6.1.1 S. 296 Verbale Aufgaben zu Kurven mit konstanter Krümmung

Parametrisierung nach s aus der Krümmung $\kappa(s)$
Es sind die drei Integrale relevant:

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\, d\, s \tag{9.11}$$

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos(\alpha(s))\, d\, s \qquad y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin(\alpha(s))\, d\, s \tag{9.12}$$

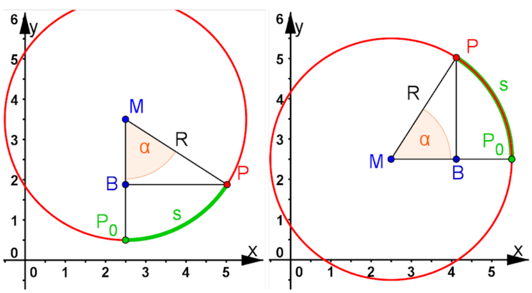

Abb. 9.26 Verbal-Aufgabe zum Kreis S. 296 Der Startpunkt sei $P(x_0, y_0)$. Die Krümmung der gesuchten Kurve sei $\kappa = \frac{1}{R}$.
Damit ist klar, dass ein Kreis herauskommen muss.
Die Bilder a) und b) zeigen verschiedene Auffassungen, wie der zu s gehörige Winkel aufgefasst werden soll.

Rechnungen zu a) Wir setzen $\alpha_0 = 0$ und $s_0 = 0$. Mit $\alpha(s) = \int_0^s \frac{1}{R}\, d\, s = \frac{1}{R} s$ haben wir die bei Kreis übliche Formel $s = \alpha\, R$ neu erzeugt. Mit $x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(\alpha(s))\, d\, s = x_0 + R\, \sin\left(\frac{s}{R}\right)$ und $y(s) = y_0 + \left(R - \int_0^s \sin(\alpha(s))\, d\, s\right) = y_0 + R - \left(-R\, \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$ und der 1 als Quadratesumme von Sinus und Kosinus erhalten wir die behauptete Formel $(x - x_0)^2 + (y - y_0 - R)^2 = R^2$.

Rechnungen zu b) Ersichtlich ist nun $x = x_0 - R + R\cos(\alpha)$ und $y = y_0 + R\sin(\alpha)$. Mit $\alpha = \frac{s}{R}$ hat das auf entsprechende Weise die Kreisgleichung $(x - x_0 + R)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ zur Folge.